6 – Cryptographie à clef publique – I

Motivation

- la cryptographie à clef secrète sait être fiable (*cf.* Cours 5)
- quelles raisons ont pu motiver un nouveau système ?
- dès les années 70, de nouvelles questions émergent :
  - comment s'échanger une clef secrète simplement ?
  - comment éviter un échange de clefs avant une communication sécurisée ?
- en 1976, Diffie et Hellman posent les jalons de la cryptographie à clef publique

> « *Nous nous trouvons aujourd'hui à l'aube d'une révolution en cryptographie ...* »

- le système cryptographique devient asymétrique car les mécanismes de chiffrement et de déchiffrement diffèrent
- dès lors, la clef de chiffrement n'a plus besoin d'être tenue secrète
- le chiffrement se fait donc grâce à une clef publique alors que le déchiffrement s'effectue au moyen d'une clef privée
- de façon générale, ces algorithmes sont plus lents que la cryptographie à clef secrète
- l'analogie est cette fois celle de la boîte-aux-lettres.

Protocole de Diffie-Hellman

- Diffie et Hellman ouvrent la voie de la cryptographie moderne, fondée sur les fonctions à sens unique
- en cela, ils résolvent le problème du partage d'un secret jusqu'alors jugé insoluble :
  1. Alice et Bob se mettent d'accord publiquement sur un grand nombre premier p et sur g une racine primitive modulo p
  2. Alice choisit un nombre a aléatoire qu'elle gardera secret
  3. Alice transmet publiquement à Bob $g^a \ mod \ p$
  4. Bob choisit de même un nombre b
  5. Bob transmet publiquement à Alice $g^b \ mod \ p$
  6. le secret commun est le nombre $\boxed{s = g^{ab} \ mod \ p}$
- Eva qui espionne le réseau ne peut pas déduire s car il lui faudrait résoudre le problème du logarithme discret (*cf.* TD 4).

Fonction à sens unique

- il existe des fonctions E bijectives dont le calcul de la réciproque $D = E^{-1}$ peut prendre ... des années : on les appelle des fonctions à sens unique
- par exemple, E l'exponentielle discrète et sa réciproque E^{-1} quand elle existe, le logarithme discret :

$$\begin{array}{rccl} E_a : & \mathbb{Z}_n & \to & \mathbb{Z}_n \\ & b & \mapsto & a^b \mod n \end{array}$$

- le calcul de la puissance est en $\mathcal{O}(\log_2(b))$ donc efficace : par élevation successive au carré (*cf.* TP 6)
- quand E^{-1} existe, elle est très coûteuse à calculer ce qui pour de grandes valeurs rend son calcul en pratique impossible
- en outre, une fonction à sens unique est dite à trappe si un indice sur E^{-1} suffit à rendre son calcul facile
- la cryptographie à clef publique est fondée sur de telles fonctions et joue avec les limites de la technologie.

Problème du logarithme discret

Soit p un nombre premier.

- théorème l'ensemble $\mathbb{F}_p \simeq \{0, ..., p-1\}$ des classes de congruence modulo p muni de l'addition modulo p et de la multiplication modulo p est un corps
- théorème le groupe multiplicatif d'un corps fini est un groupe cyclique
- autrement dit, si p est premier et que g est une racine primitive modulo p, alors l'exponentielle discrète f est bijective :

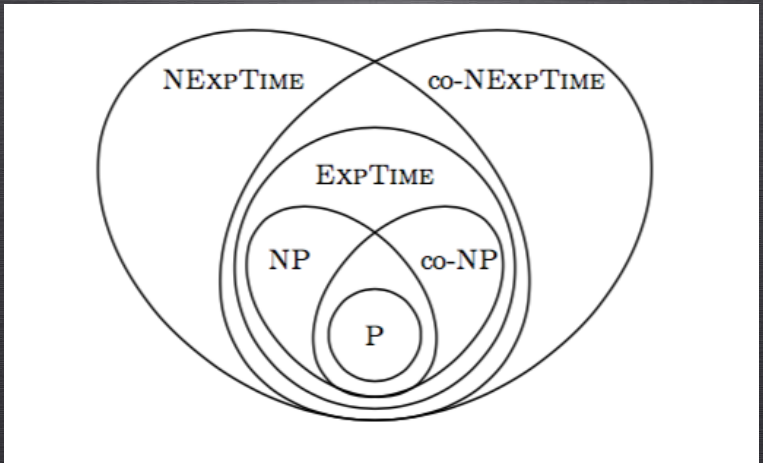
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}_p^* & \to & \mathbb{Z}_p^* \\ & x & \mapsto & g^x \mod p \end{array}$$

- une racine primitive modulo p est un entier g générateur du groupe cyclique $\mathbb{Z}_p^*$ et on a :

$$\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \{g^k \mod p,\ k \in \{1, \ldots, p-1\}\}$$

- pour p assez grand (plus d'une centaine de chiffres), cette fonction peut être considérée comme étant à sens unique : il est très coûteux avec la technologie actuelle de calculer le logarithme discret $f^{-1}(y)$ pour un $y \in \mathbb{Z}_p^*$ donné
- le problème de décision associé $LOGD \in$ NP ∩ co-NP

Classes de complexité temporelle



Cryptographie à clef publique

- avec M le message clair, E_{K_e} et D_{K_d} les fonctions de chiffrement et déchiffrement et C le message chiffré, on a déjà vu que :

$$E_{K_e}(M) = C$$

$$D_{K_d}(C) = M$$

- du fait de l'asymétrie, on a en outre :

$$K_e \neq K_d$$

- K_e est une clef publique publiée sur un annuaire sous la forme d'un certificat tandis que K_d est une clef privée secrète
- le secret réside dans $H(K_d/K_e)$ c'est-à-dire dans la révélation de K_d sachant K_e
- la fonction E_{K_e} est publique et la fonction D_{K_d} est l'inverse de E_{K_e}
- on pourrait penser qu'il n'y a aucune incertitude sur K_d sachant K_e
- mais K_e peut être choisie de telle sorte que K_d soit très difficile à calculer
- c'est là qu'entrent en jeu les fonctions à sens unique.

RSA

- cet algorithme de chiffrement a été inventé en 1978 par R. Rivest, A. Shamir et L. Adleman
- breveté par le MIT en 1983, tombé dans le domaine public en 2000
- c'est le chiffrement asymétrique le plus employé aujourd'hui (cartes bleues, Internet, commerce électronique, ...)
- il exploite les réalités suivantes :
  - il est *facile* de construire de grands nombres premiers
  - il est *difficile* pour un ordinateur de factoriser un grand nombre
  - il est *difficile* de résoudre le problème du logarithme discret
- le problème de la factorisation des entiers est dans NP ∩ co-NP
- en théorie et seulement depuis 2002, il est devenu *facile* de décider si un grand nombre est premier :

Prime ∈ P

Indicatrice d'Euler

- l'indicatrice d'Euler d'un entier n notée $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n

$$\varphi(n) = \text{card}\ \{j \in \{1,\ldots,n\} / \text{pgcd}(j,n) = 1\}$$

- $\varphi(1) = 1$ et pour tout entier premier p : $\varphi(p) = p - 1$
- décomposition de n en produit de facteurs p_i premiers avec $1 \leq i \leq q$:

$$n = \prod_{i=1}^{q} p_i^{\alpha_i}$$

- si p est premier, un élément k de $\{1, ..., p^\alpha\}$ n'est pas premier avec p^α ssi $p \mid k$ donc $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = (p-1)p^{\alpha-1}$
- si $pgcd(\alpha, \beta) = 1$ on a $\varphi(\alpha.\beta) = \varphi(\alpha).\varphi(\beta)$ d'où le calcul de $\varphi(n)$ pour $n > 1$:

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{q} (p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1} = n \prod_{i=1}^{q} (1 - \frac{1}{p_i})$$

Exemple $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$
$\varphi(504) = (2-1)\,.\,2^{3-1} \times (3-1)\,.\,3^{2-1} \times (7-1)\,.\,7^{1-1} = 144$
$\varphi(504) = 504\,(1 - \frac{1}{2})\,(1 - \frac{1}{3})\,(1 - \frac{1}{7}) = 144$

Théorème de Fermat-Euler

- petit théorème de Fermat (1640)

  pour p premier et m tel que $0 < m < p$:

$$m^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

et sa généralisation :

- théorème d'Euler (1761)

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n \text{ si } \text{pgcd}(m,n) = 1$$

Encore un peu d'arithmétique modulaire ...

- théorème de Bézout

  soient a et b deux entiers naturels, il existe des entiers relatifs u et v tels que :

$$\text{pgcd}(a,b) = u\,.\,a + v\,.\,b$$

- conséquence : si a et b sont premiers entre eux, il existe u tel que

$$u\,.\,a \equiv 1 \mod b$$

- théorème dit *des restes chinois* ou *chinois*

  si $p_1, ..., p_k$ sont des entiers 2 à 2 premiers et $a_1, ..., a_k$ des entiers quelconques alors le système de k équations suivant admet une unique solution modulo $p_1 ... p_k$:

$$x = a_i \mod p_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k$$

Le cryptosystème RSA

- préparation des clefs :
  1. le destinataire Bob choisit 2 grands nombres premiers distincts p et q (de l'ordre de 10^{100}) et calcule $n = p\,q$
  2. il choisit e un entier premier à $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
  3. il calcule sa clef privée d telle que $e.d \equiv 1 \mod \varphi(n)$
  4. il publie le couple (n, e) : c'est sa clef publique

- chiffrement de M avec $0 < M < n$:
  Alice chiffre son message M avec la clef publique (n, e) de Bob et envoie le chiffré C à Bob :

$$C = E_e(M) \equiv M^e \mod n$$

- déchiffrement de C :
  Bob déchiffre le chiffré C envoyé par Alice avec sa clef privée d :

$$M = D_d(C) \equiv C^d \mod n$$

Les implémentations sont soit logicielles, soit matérielles (voire mixtes). Sur des cartes dédiées, RSA est environ 2000 fois plus lent que AES.

RSA : EXEMPLE

- préparation des clefs :
  1. le destinataire Bob choisit 2 nombres premiers distincts $p = 7$ et $q = 11$ puis calcule $n = p\,q = 77$
  2. il choisit $e = 7$ un entier premier à $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 60$
  3. d'après Bézout, $\text{pgcd}(7,60) = 1 = (-17) * 7 + (2) * 60$
  4. il calcule sa clef privée $d = 43$ telle que $e\,d \equiv 1 \mod \varphi(n)$
  5. il publie le couple $(n,e) = (77,7)$: c'est sa clef publique

- chiffrement de M avec $0 < M < n$:

  Alice chiffre son message $M = 13$ avec la clef publique $(n,e) = (77,7)$ de Bob et envoie le chiffré C à Bob :

$$C = E_e(M) \equiv M^e \mod n = 13^7 \mod 77 = 62$$

- déchiffrement de C :

  Bob déchiffre le chiffré C = 62 envoyé par Alice avec sa clef privée $d = 43$:

$$M = D_d(C) \equiv C^d \mod n = 62^{43} \mod 77 = 13$$

RSA : JUSTIFICATION

$e\,d \equiv 1 \mod \varphi(n)$ et $0 < M < n$:

- l'existence de d est due au théorème de Bézout
- si $\text{pgcd}(M,n) = 1$ d'après le théorème de Fermat-Euler :

$$M^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$$

$$(M^e)^d = M^{ed} \equiv M \mod n$$

- si $\text{pgcd}(M,n) \neq 1$: supposons e.g. $M \equiv 0 \mod p$ et $\text{pgcd}(M,q) = 1$

$$M^{\varphi(n)} \equiv 0 \mod p$$

et d'après le théorème de Fermat-Euler :

$$M^{\varphi(q)} \equiv 1 \mod q$$

$\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q)$ donc $M^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod q$

on a obtenu : $\begin{cases} M^{ed} \equiv 0 \mod p \\ M^{ed} \equiv M \mod q \end{cases}$

RSA : JUSTIFICATION (SUITE)

d'après le théorème chinois : $\exists!\ c$ tel que $M^{ed} \equiv c \mod (pq)$

$$\begin{cases} M^{ed} = 0 + \lambda\,p \\ \lambda\,p \equiv M \mod q \end{cases}$$

p et q étant premiers, on a les coefficients de Bézout u et v tels que

$$u.p + v.q = 1$$

en posant $\lambda = u\,M$, on trouve la solution :

$$c = u\,p\,M$$

en effet, comme M est multiple de p, on obtient :

$$c = (1 - v.q).M = M - (v.q.M) \equiv M \mod (pq)$$

on conclut : $M^{ed} \equiv M \mod n$

COEFFICIENTS DE BÉZOUT

- l'algorithme d'Euclide étendu prolonge l'algorithme d'Euclide calculant le `pgcd` de deux entiers a et b
- il fournit les coefficients de Bézout, c'est-à-dire des entiers relatifs u et v qui vérifient :

$$\text{pgcd}(a,b) = u\,.\,a + v\,.\,b \quad \text{avec } u,v \in \mathbb{Z}$$

- notez que pour a et b donnés, le couple (u,v) n'est pas unique

Algorithme récursif en PYTHON :

```
def bezout(a,b) :
    if b == 0 :
        return (a,1,0)
    q = a // b
    r = a % b
    g,u,v = bezout(b,r)
    return g,v,u-q*v
```

Exemples
27 et 40 sont premiers entre eux : $\text{pgcd}(27,40) = 1 = (3) * 27 + (-2) * 40$
27 et 42 ne sont pas premiers entre eux : $\text{pgcd}(27,42) = 3 = (-3) * 27 + (2) * 42$

Cryptanalyse (par seule factorisation de n)

Exemple

- Bob envoie un message à Alice par RSA avec $(n,e) = (133,61)$
  1. quelle est la clef privée d'Alice ?
  2. si le chiffré reçu par Alice est 17, quel est le clair correspondant ?
     (entre 1 et $n-1$)

- par tâtonnements, on factorise $n = 133$ en $p.q$ avec $p = 7$ et $q = 19$
- on calcule $\varphi(133) = 6.18 = 108$
- pour calculer la clef privée d d'Alice correspondant à $e = 61$:

$$d \equiv e^{-1} \mod \varphi(n)$$

- on recheche les coefficients de Bézout sur $(61,108)$:

```
bezout(61,108) = (1,-23,13)
```

  donc $\text{pgcd}(61,108) = 1 = (-23) * 61 + (13) * 108$
- on en déduit donc que : $d \equiv -23 \mod 108 \Rightarrow d = 85$
- pour déchiffrer le message chiffré $C = 17$ destiné à Alice, il suffit de calculer $17^{85} \mod 133$:

```
expMod(17,85,133) = 73
```

L'attaque de l'homme du milieu

Elle porte sur la communication des clefs :

- Bob demande sa clef publique (n,e) à Alice pour lui envoyer sûrement le message M
- Alice envoie (n,e) à Bob
- Melchior intercepte (n,e) et envoie à la place (n',e') à Bob
- Bob chiffre en utilisant à son insu la clef factice (n',e') de Melchior et envoie le message ainsi chiffré C' à Alice
- Melchior intercepte à nouveau le message chiffré C' et le déchiffre aisément en M
  ...

Melchior pourrait arrêter là les nuisances, mais non :

- Melchior rechiffre M avec (n,e) et le transmet à Alice ...

Cette attaque classique porte aussi le nom de *Man in the middle* en anglais.

Elle débouche sur les problèmes d'authentification pour éviter l'usurpation d'identité.

Les certificats et les chaînes de certification en sont, à l'heure actuelle, la seule parade.

A suivre ...