

Travaux dirigés n° 2

Réurrences

Exercice 2.1

Trouvez les solutions des relations de récurrence suivantes en utilisant le cours :

1. $T(N) = T(N - 2) + N \log(N)$;
2. $T(N) = 3 \times T(N - 2) + N$;
3. $T(N) = 7 \times T(N/2) + N^3 \log(N)$;
4. $T(N) = 4 \times T(N/2) + N$;
5. $T(N) = T(N/5) + T(4N/5) + N$;
6. $T(N) = 4 \times T(N/2) + N^2$;
7. $T(N) = T(\sqrt{N}) + \log(N)$.

Exercice 2.2

Quelle est, en fonction de N , la complexité de l’algorithme récursif suivant ? On suppose que chaque opération se fait en temps constant $O(1)$. Commencez par écrire la relation de récurrence puis trouvez sa solution.

```
TOTO2 ( entier N) {  
1   si (N ≤ 1) {  
2       retourner  
3   }  
4   pour (i ← 1; i ≤ N; i++) {  
5       pour (j ← 1; j ≤ N; j ← ++ ) {  
6           affiche ( '*' )  
7       }  
8   }  
9   TOTO2(N-3)  
10 }
```

Exercice 2.3

Quelle est, en fonction de N , la complexité de l’algorithme récursif suivant ? On suppose que chaque opération se fait en temps constant $O(1)$. Commencez par écrire la relation de récurrence puis trouvez sa solution.

```
TOTO3 ( entier N) {  
1   si (N ≤ 1) {  
2       retourner  
3   }  
4   i ← 1  
5   pour (i ← 1; i ≤ 3; i++) {  
6       TOTO3(N-1)  
7   }  
8 }
```

```
}  
}
```

Exercice 2.4 — Recherche dichotomique

L'algorithme suivant recherche l'élément a dans un tableau trié à n éléments. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

```
BS ( entier T[], entier i, entier j, entier a){ // T trié  
1   si (j < i) {  
2       retourner FAUX  
   }  
3   tt ← i + ⌊(j - i)/2⌋  
4   si (T[tt] < a) {  
5       retourner BS (T, tt+1, j, a)  
   }  
6   sinon si (T[tt] > a) {  
7       retourner BS (T, i, tt-1, a)  
   }  
   sinon {  
8       retourner VRAI  
   }
```

Exercice 2.5 — Tri-fusion

L'algorithme du tri par fusion trie un tableau de n nombres. Trouvez sa complexité en fonction de n .

```
merge_sort ( entier T[], entier i, entier j) {  
1   si (j > i) {  
2       tt ← i + ⌊(j - i)/2⌋  
3       merge_sort (T, i, tt)  
4       merge_sort (T, tt+1, j)  
5       merge (T, i, j)  
   }  
}
```