

Travaux dirigés n° 1

Analyse des algorithmes itératifs

Exercice 1.1

Soit N un entier naturel, on pose $n = \log_2(N)$ et $m = \log_3(N)$. Pour l'ordre de grandeur de chaque fonction, dire si cela est **Vrai** ou **Faux** :

1. $n \in O(m)$;
2. $2^n \in O(2^m)$;
3. $n^2 \in O(m^2)$;
4. $3^N \in O(2^N)$.

Exercice 1.2

Quelle est, en fonction de N , la complexité temporelle de l'algorithme suivant ? On suppose que chaque opération se fait en temps constant $O(1)$.

```
TOTO ( entier N) {
1   count ← 0
2   pour ( i ← 1; i * i ≤ N; i++) {
3     count++
4   }
5   retourner count
}
```

Exercice 1.3

Quelle est, en fonction de N , la complexité temporelle de l'algorithme suivant ? On suppose que chaque opération se fait en temps constant $O(1)$.

```
FOO ( entier N) {
1   count ← 0
2   pour ( i ← N div 2; i ≤ N; i++) {
3     pour ( j ← 1; j ≤ N; j ← 2*j) {
4       pour ( k ← 1; k ≤ N; k ← 2*k) {
5         count++
6       }
7     }
8   }
9   retourner count
}
```

Exercice 1.4 — Tri par insertion

L'algorithme du tri par insertion trie un tableau de n nombres. Trouvez sa complexité en fonction de n .

```
insertion_sort (entier T[], entier n) {
1  pour (i ← 2; i ≤ n; i++) {
2    a ← T[i]
3    j ← i-1
4    tant que (j > 0 et a < T[j]) {
5      T[j + 1] ← T[j]
6      j ← j - 1
7    }
8    T[j + 1] ← a
9  }
```

Exercice 1.5 — Tri par sélection

L'algorithme du tri par sélection trie un tableau de n nombres. Trouvez sa complexité en fonction de n .

```
selection_sort (entier T[], entier n) {
1  pour (i ← 1; i < n; i++) {
2    minj ← i
3    mina ← T[i]
4    pour (j ← i+1; j ≤ n; j++) {
5      si (T[j] < mina) {
6        minj ← j
7        mina ← T[j]
8      }
9      T[minj] ← T[i]
10     T[i] ← mina
11   }
12 }
```

Exercice 1.6 — Questions de taille

Soit x et y deux entiers de n bits (la **taille** de x et y est donc n). Donnez pour chacune des questions suivantes une réponse en fonction de n . Vous pouvez utiliser la notation O .

1. Quelle est la plus grande valeur de x possible ?
2. Quelle est la taille en nombre de bits de x^2 ?
3. Quelle est la taille en nombre de bits de 2^x ?
4. Quelle est la taille en nombre de bits de $x \times y$?
5. Quelle est la taille en nombre de bits de x^y ?
6. Quelle est la taille en nombre de bits de $x^x \bmod y$?
7. Quelle est la taille en nombre de bits de $x!?$