Nom :

Prénom :

Université Côte d'Azur 2025–2026

L3 Info – L3 Math-Info

Automates & Langages

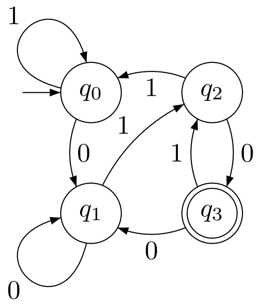
Examen du 7 janvier

Durée : 1h30

Seule une feuille manuscrite recto autorisée.

Note :

Exercice 1 : (4 points) On se place sur l'alphabet binaire $\Sigma = \{0, 1\}$. Soit l'automate fini minimal $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ où $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ et $F = \{q_3\}$. La fonction δ se déduit du schéma suivant :



1. Posez (à droite de l'automate) le système d'équations correspondant à $\mathcal{A}$, les inconnues étant des expressions régulières pour chacun des langages associés à un état.
2. Résolvez ce système afin de trouver une expression régulière décrivant le langage $L(\mathcal{A})$.

3. Donnez une description en français du langage $L(\mathcal{A})$.

Exercice 2 : (3 points) Plaçons-nous sur l'alphabet $\Sigma = \{0,1\}$. Voici la table de transition δ d'un automate à pile $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_1', q_2, q_2', q_3\}, \Sigma, \{X, Y, \mathcal{Z}\}, \delta, q_0, \mathcal{Z}, \varnothing)$, la reconnaissance se fait sur pile vide.

état	lecture	pile	nouvel état	à empiler
q_0	0	ε	q_0	X
q_0	1	ε	q_0	Y
q_0	0	ε	q_1	ε
q_0	1	ε	q_1'	ε
q_1	0	X	q_1	ε
q_1	1	Y	q_1	ε
q_1'	0	X	q_1'	ε
q_1'	1	Y	q_1'	ε
q_1	ε	$\mathcal{Z}$	q_2	$\mathcal{Z}$
q_1'	ε	$\mathcal{Z}$	q_2'	$\mathcal{Z}$

état	lecture	pile	nouvel état	à empiler
q_2	0	ε	q_2	X
q_2	1	ε	q_2	Y
q_2'	0	ε	q_2'	X
q_2'	1	ε	q_2'	Y
q_2	1	ε	q_3	ε
q_2'	0	ε	q_3	ε
q_3	0	X	q_3	ε
q_3	1	Y	q_3	ε
q_3	ε	$\mathcal{Z}$	q_3	ε

1. Dessinez l'automate à pile $\mathcal{A}$ *(il est composé de deux moitiés symétriques)*.

2. L'automate à pile $\mathcal{A}$ est-il déterministe ? Justifiez brièvement.

3. Expliquez quel est le langage hors-contexte $L_\varnothing(\mathcal{A})$ ainsi reconnu par l'automate à pile $\mathcal{A}$ sur pile vide.

Exercice 3 : **(4 points)** Montrez à l'aide du lemme de l'étoile que le langage L n'est pas hors-contexte :

$$L = \{w \in \{0,1,2\}^*, |w|_0 = |w|_1 = |w|_2\}$$

Exercice 4 : **(2 points)** Répondez aux questions suivantes en argumentant brièvement :

1. Rappelez ce qu'est la *thèse de Church-Turing* en l'expliquant brièvement.

2. Le nombre de *fonctions calculables* sur un alphabet Σ donné est-il dénombrable ? Justifiez.

Exercice 5 : **(4 points)** On définit la machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \sharp, F)$ par les ensembles : $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Gamma = \{X, Y, \sharp\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, q_0 est l'état initial et $F = \{q_4\}$. La relation de transition δ est formée des quintuplets ci-dessous :

$$\begin{array}{lllll} (q_0, 0, q_1, X, D) & (q_1, 0, q_1, 0, D) & (q_1, 1, q_2, Y, G) & (q_2, 0, q_2, 0, G) & (q_3, Y, q_3, Y, D) \\ (q_0, Y, q_3, Y, D) & (q_1, Y, q_1, Y, D) & (q_2, X, q_0, X, D) & (q_2, Y, q_2, Y, G) & (q_3, \sharp, q_4, \sharp, D) \end{array}$$

1. Quel est le langage $L = L(\mathcal{M})$ reconnu par $\mathcal{M}$?

2. On s'intéresse à présent au langage $K = \overline{L}$, le complémentaire du langage L précédent, défini par $K = \Sigma^* \setminus L$. En prenant la machine $\mathcal{M}$ comme base, trouvez puis dessinez une nouvelle machine de Turing $\mathcal{M}'$ pour reconnaître le langage K.

3. Indiquez à quelle classe de langages appartient le langage K et précisez pourquoi.

Exercice 6 : **(3 points)** Considérons le langage contextuel suivant :

$$L = \{0^n 1^n 2^n,\ n > 0\}$$

On cherche une grammaire G pour l'engendrer. Complétez le début de réponse proposé :

Grammaire G			
Axiome = X			
N = { X, Y, Z }			
T = { 0, 1, 2 }			
P = {	X	$\rightarrow$	0 X Y Z
	X	$\rightarrow$	$\ldots$
	Z Y	$\rightarrow$	$\ldots$
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$
	$\ldots$	$\rightarrow$	$\ldots$ }

Détaillez la suite de dérivations permettant d'obtenir le mot 001122 de $L(G)$ à partir de l'axiome X.