Université Côte d'Azur 2024–2025
Licence 3 Info – L3 Math-Info – L3 Sc. & Techn.

Automates & Langages

Contrôle continu du 4 novembre

Nom :

Prénom :

Durée : 1h30
Seule une feuille manuscrite recto autorisée.

Note :

Exercice 1 : (4 points) On se place sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et on considère le langage L décrit par l'expression régulière suivante :

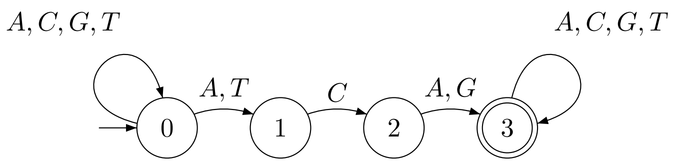
$$L : \ (1 + 00 + 000)^*$$

1. Construisez les états de l'automate minimal $\mathcal{M}$ reconnaissant le langage L, en utilisant la méthode des résiduels à gauche puis dessinez l'automate $\mathcal{M}$ obtenu *(l'automate a seulement 4 états)*.

2. Décrivez en français ce qui caractérise les mots du langage L.

3. Déduisez de l'automate $\mathcal{M}$ une grammaire régulière à droite *propre* pour engendrer $L(\mathcal{M})$.

Exercice 2 : (5 points) On cherche à repérer des séquences de bases azotées dans un filament d'ADN. Il y a 4 bases azotées : adénine, cytosine, glutamine et thymine qui donnent lieu à l'alphabet $\Sigma = \{A, C, G, T\}$. Voici la description d'un automate fini non-déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q = \{0, 1, 2, 3\}, \delta, 0, F = \{3\})$ pour reconnaître les motifs voulus, sa relation de transition δ se déduit aisément du schéma suivant :

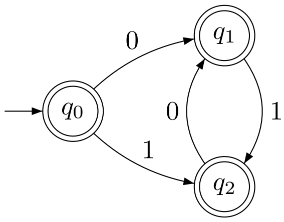


1. Construisez la table de transition de l'automate $\mathcal{D}$ obtenu en déterminisant l'automate $\mathcal{A}$ précédent. Il n'est pas utile de dessiner l'automate.

2. Appliquez l'algorithme de minimisation à l'automate $\mathcal{D}$ précédent afin d'obtenir l'automate minimal $\mathcal{M}$. Vous détaillerez les étapes de l'algorithme depuis $\approx_0$ puis dessinerez l'automate minimal $\mathcal{M}$ obtenu.

3. Donnez *de visu* une expression régulière décrivant le langage L reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.

Exercice 3 : (3 points) On considère l'automate fini $\mathcal{A} = (\Sigma, Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, F = Q$ représenté sur la figure ci-dessous :



1. A droite de l'automate, posez le système d'équations lui correspondant. On rappelle que les inconnues sont des expressions régulières Y_0, Y_1 et Y_2 décrivant le langage associé à chacun des états.
2. Résolvez ce système et déduisez-en une expression régulière pour le langage $L(\mathcal{A})$.

Exercice 4 : **(4 points)** Montrez à l'aide du lemme de l'étoile que le langage L ci-dessous n'est pas rationnel :

$$L = \{m \in \{0,1\}^*, |m|_0 < |m|_1\}$$

Exercice 5 : **(4 points)** Considérons les quatre grammaires hors-contexte suivantes :

$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0,1\}, P_1, S)$ $P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to \varepsilon \mid 0A \mid 1B \\ A \to S\,0 \mid 0 \\ B \to S\,1 \mid 1 \end{array} \right\}$	$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0,1\}, P_2, S)$ $P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0S \mid 1A \\ A \to 0 \mid 0B \mid 1A \\ B \to 1A \mid 0S \end{array} \right\}$
$G_3 = (\{S\}, \{0,1\}, P_3, S)$ $P_3 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 1 \mid S1 \\ S \to 0SS \mid S0S \mid SS0 \end{array} \right\}$	$G_4 = (\{S, A, B\}, \{0,1\}, P_4, S)$ $P_4 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0B \mid 1A \\ A \to 0 \mid 0S \mid 1AA \\ B \to 1 \mid 1S \mid 0BB \end{array} \right\}$

Retrouvez pour chaque grammaire précédente son langage parmi les 8 suivants :

L_1 : les mots finissant par 10
L_2 : les mots ayant plus de 0 que de 1
L_3 : les palindromes de longueur paire
L_4 : les mots ayant autant de 0 que de 1
L_5 : les mots de Dyck sur l'alphabet $\{0,1\}$
L_6 : les mots finissant par 01
L_7 : les mots ayant plus de 1 que de 0
L_8 : les palindromes de longueur impaire

$L(G_1) = \ldots\ldots\ldots \quad L(G_2) = \ldots\ldots\ldots \quad L(G_3) = \ldots\ldots\ldots \quad L(G_4) = \ldots\ldots\ldots$