Université Côte d'Azur 2024–2025
Licence 3 Info – L3 Math-Info – L3 Sc. & Techn.

Automates & Langages

Examen du 9 janvier

Nom :
Prénom :

Durée : 1h30
Seule une feuille manuscrite autorisée.

Note :

Exercice 1 : (3,5 points) Considérons la grammaire hors-contexte G suivante :

Grammaire G	Grammaire G' sous F.N.C
Axiome = S	Axiome = S
N = {S, X}	N' = { S, ... }
T = {0, 1, 2}	T = {0, 1, 2}
P = { S → 0 X | 1 S 1 | 2	P' = { S → ...
X → S 0 }	...
	}

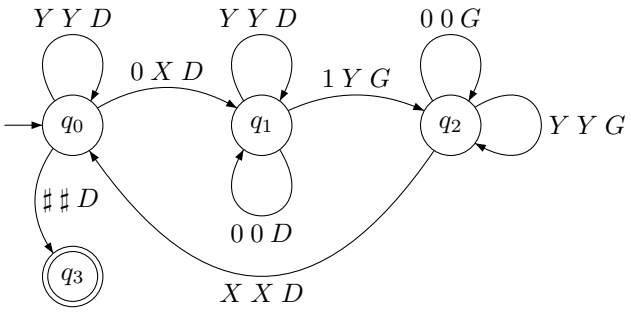
1. La grammaire G est déjà propre, mettez-la sous Forme Normale de Chomsky ci-dessus à droite.
2. Analysez le mot 10201201 grâce à l'algorithme de Cocke, Younger et Kasami (CYK) et décider de son appartenance à $L(G)$.

3. Citez également tous les facteurs du mot précédent 10201201 appartenant à $L(G)$.

4. Finalement, quel est le langage engendré par la grammaire G ?

Exercice 2 : **(3,5 points)** La machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \sharp, F)$ est définie par les ensembles ci-dessous et par les transitions de δ décrites dans le schéma suivant :

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Gamma = \{0, 1, X, Y, \sharp\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $F = \{q_3\}$



1. Quel est le langage L reconnu par la machine de Turing $\mathcal{M}$? Expliquez brièvement comment.

2. Ce langage L est hors-contexte, donnez une grammaire G si possible non-ambiguë qui l'engendre.

3. Déduisez de $\mathcal{M}$ une machine de Turing $\mathcal{M}'$ pour reconnaître le complémentaire du langage $L(\mathcal{M})$ reconnu par $\mathcal{M}$. *Merci de disposer les états et les transitions que vous réutilisez comme dans $\mathcal{M}$.*

Exercice 3 : (3 points) Un message est un mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ muni à la fin d'un *bit de parité*. On appelle M l'ensemble de tous les messages. On rappelle que le bit de parité est le nombre de 1 que contient la partie de message qui le précède, calculé modulo 2. Ex : le message **101011** est interprété comme étant le mot 10101 suivi du bit de parité 1, le message **0** est le mot vide suivi du bit de parité 0.

1. Dessinez directement l'automate fini minimal qui reconnaît le langage M.

2. Dorénavant, les messages reçus seront des concaténations de deux mots de M de même longueur. Dessinez un automate à pile pour reconnaître ce nouveau langage L qui est hors-contexte :

$$L = \{mm', m \in M, m' \in M \text{ et } \mid m \mid = \mid m' \mid\}$$

Exercice 4 : (4 points) Répondez aux questions suivantes en argumentant brièvement :

1. Le complémentaire d'un langage reconnu par automate à pile déterministe est-il hors-contexte ?

2. La classe des langages récursifs est-elle close par complémentation ?

3. Qu'est-ce qu'une fonction non calculable ?

4. L'ensemble des automates cellulaires élémentaires est-il dénombrable ?

Exercice 5 : (4 points) Montrez à l'aide du lemme de l'étoile que le langage L n'est pas hors-contexte :

$$L = \{ww, w \in \{0,1\}^*\}$$

Exercice 6 : (2 points) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G

Axiome = S

N = {S, A, B, C, D}

T = {a, b, c, d}

P = {
S → A B C D S
S → a b c d
B a → a B
C a → a C
C b → b C
D a → a D
D b → b D
D c → c D
A a → a a
B b → b b
C c → c c
D d → d d
}

1. Donnez un exemple de dérivation d'un mot de $L(G)$ de longueur supérieure ou égale à 5.

2. Quel est le langage $L(G)$ engendré par la grammaire G ?