Université Côte d'Azur 2023–2024
Licence 3 Info – L3 Math-Info – L3 Sc. & Techn.

Automates & Langages

Examen du 10 janvier

Nom :
Prénom :

Durée : 1h30
Seule une feuille manuscrite autorisée.

Note :

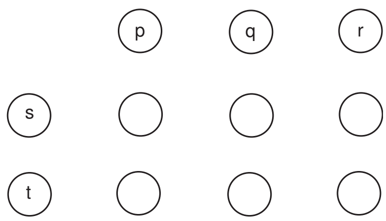
Exercice 1 : **(3 points)** Considérons les langages rationnels L et K respectivement décrits par les expressions régulières suivantes sur l'alphabet $A = \{a\}$:

$$E_L : (aaa)^*$$

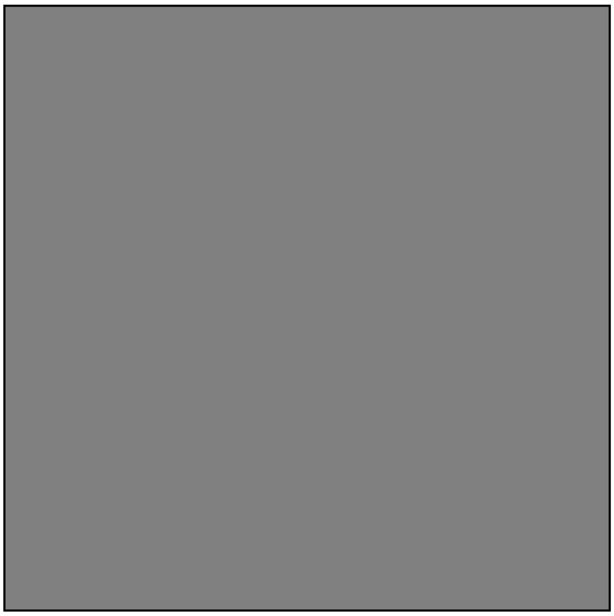
$$E_K : (aa)^*$$

1. Soit $M = L \setminus K$. On peut aussi écrire $M = L \cap \overline{K}$ avec $\overline{K}$ le complémentaire de K. Décrivez en français le langage M :

2. Dessinez un automate fini pour le langage L horizontalement en haut puis un automate fini pour le langage $\overline{K}$ (le complémenataire de K) verticalement à gauche. Construisez alors un automate fini pour le langage M en effectuant l'intersection des automates précédents. *Ne faites figurer que les transitions utiles à la reconnaissance des mots de M.*



3. Déduisez une expression régulière pour le langage M après avoir éventuellement redessiné l'automate-produit au brouillon pour plus de clarté.



Exercice 2 : (5 points) Considérons la grammaire hors-contexte G suivante :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S, X, Y}
T = {0, 1}
P = { $S \rightarrow X \mid Y$
$X \rightarrow 0 \mid 0\,X \mid 1\,X\,X \mid X\,1\,X \mid X\,X\,1$
$Y \rightarrow 1 \mid 1\,Y \mid 0\,Y\,Y \mid Y\,0\,Y \mid Y\,Y\,0$ }

1. Quel est le langage hors-contexte $L(G)$ engendré par cette grammaire ?

2. Dessinez (en haut à droite de la page) un automate à pile pour $L(G)$ en signalant son mode de reconnaissance. Vous l'imaginerez entièrement, sans utiliser la méthode du cours pour passer automatiquement d'une grammaire à un automate à pile. Votre automate à pile est-il déterministe ?

3. Dessinez ci-dessous une machine de Turing qui accepte le même langage $L(G)$.

Exercice 3 : **(5 points)** Considérons la grammaire hors-contexte G suivante :

Grammaire G
Axiome = S
N = {S}
T = {0, 1}
P = { $S \rightarrow 0 \mid 0\,S$
$S \rightarrow 1\,S\,S \mid S\,1\,S \mid S\,S\,1$ }

1. Transformez G en une grammaire G' équivalente sous Forme Normale de Chomsky (toutes les productions seront de la forme $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ avec A, B, C non-terminaux et a terminal).

2. Procédez à l'analyse du mot 001010 par l'algorithme de Cocke, Younger et Kasami (CYK). S'il appartient au langage $L(G)$, déduisez-en un arbre de dérivation de ce mot pour la grammaire G'.

3. Listez tous les facteurs du mot 001010 qui appartiennent au langage $L(G)$.

4. La grammaire G initiale est-elle ambiguë ? Pourquoi ?

5. Finalement, quel est le langage engendré par la grammaire G ?

Exercice 4 : **(4 points)** On considère le langage des carrés écrits en unaire :

$$L = \{1^{k^2}, k > 0\}$$

Montrez en utilisant le lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte que ce langage L n'est pas hors-contexte.

Exercice 5 : **(3 points)** Considérons une grammaire G suivante :

Grammaire G

Axiome = X
N = { X, Y, Z }
T = { 0, 1, 2 }
P = { X $\rightarrow$ 1 X Y Z
X $\rightarrow$ 1 Y Z
Z Y $\rightarrow$ Y Z
0 Y $\rightarrow$ 0 0
1 Y $\rightarrow$ 1 0
0 Z $\rightarrow$ 0 2
2 Z $\rightarrow$ 2 2 }

1. Cette grammaire G est-elle hors-contexte ? Pourquoi ?

2. Donnez un exemple de la suite de dérivations permettant d'obtenir un mot de $L(G)$ à partir de l'axiome X. On choisira un mot de longueur supérieure ou égale à 4.

3. Quel est le langage $L(G)$ engendré par la grammaire G ? Est-il hors-contexte ?