Université Côte d'Azur 2023–2024
Licence 3 Info – L3 Math-Info – L3 Sc. & Techn.

Automates & Langages

Examen du 10 janvier

Nom :
Prénom :

Correction

Durée : 1h30
Seule une feuille manuscrite autorisée.

Note :

Exercice 1 : **(3 points)** Considérons les langages rationnels L et K respectivement décrits par les expressions régulières suivantes sur l'alphabet $A = \{a\}$:

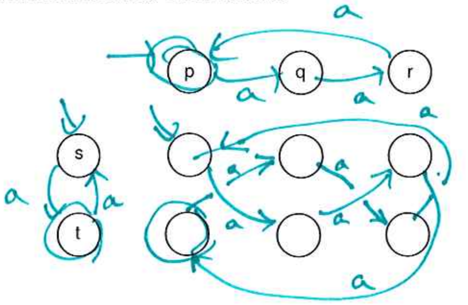
$$E_L : (aaa)^*$$

$$E_K : (aa)^*$$

1. Soit $M = L \setminus K$. On peut aussi écrire $M = L \cap \overline{K}$ avec $\overline{K}$ le complémentaire de K. Décrivez en français le langage M :

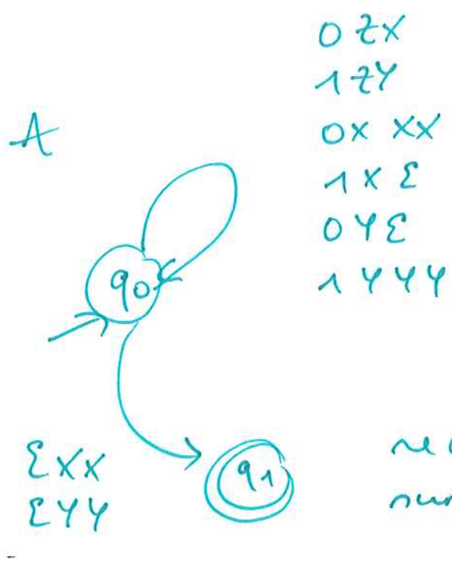
Mots non vides dont le nombre de a
est impair et divisible par 3.

2. Dessinez un automate fini pour le langage L horizontalement en haut puis un automate fini pour le langage $\overline{K}$ (le complémenataire de K) verticalement à gauche. Construisez alors un automate fini pour le langage M en effectuant l'intersection des automates précédents. *Ne faites figurer que les transitions utiles à la reconnaissance des mots de M.*



3. Déduisez une expression régulière pour le langage M après avoir éventuellement redessiné l'automate-produit au brouillon pour plus de clarté.

$aaa(aaaaaa)^*$



reconnaissance sur état final

Exercice 2 : **(5 points)** Considérons la grammaire hors-contexte G suivante :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S, X, Y}
T = {0, 1}
P = { S → X | Y
X → 0 | 0 X | 1 X X | X 1 X | X X 1
Y → 1 | 1 Y | 0 Y Y | Y 0 Y | Y Y 0 }

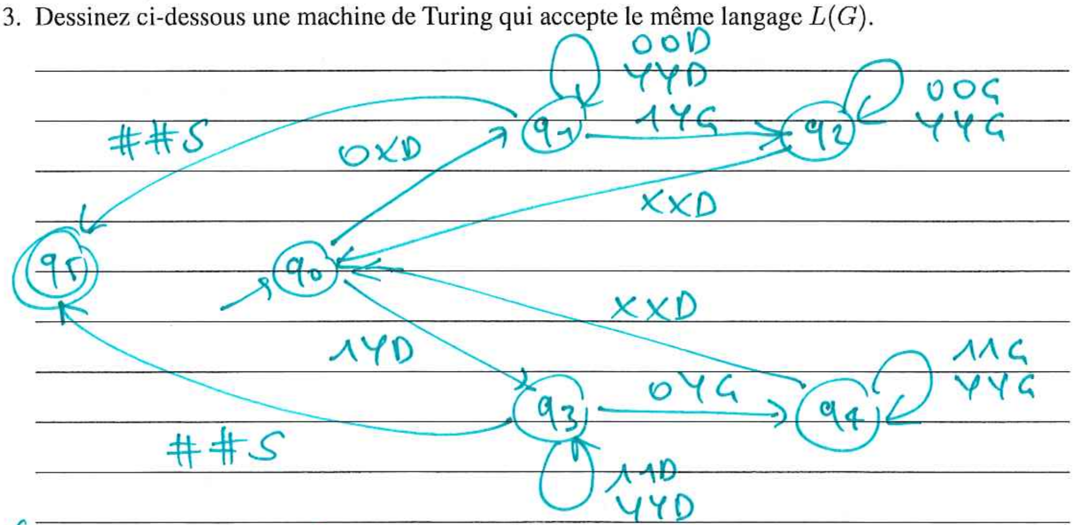
1. Quel est le langage hors-contexte $L(G)$ engendré par cette grammaire ?

$L(G) = \{ w \in \{0,1\}^*, |w|_0 \neq |w|_1 \}$

2. Dessinez (en haut à droite de la page) un automate à pile pour $L(G)$ en signalant son mode de reconnaissance. Vous l'imaginerez entièrement, sans utiliser la méthode du cours pour passer automatiquement d'une grammaire à un automate à pile. Votre automate à pile est-il déterministe ?

L'automate à pile A n'est pas déterministe.

3. Dessinez ci-dessous une machine de Turing qui accepte le même langage $L(G)$.



(A partir de la MT qui reconnaît les mots ayant autant de 0 que de 1, on ajoute la transition de q1 à q5 quand on échoue à trouver le 1 correspondant au 0 lu (resp. q3 à q5 pour 0 et 1).

Exercice 3 : **(5 points)** Considérons la grammaire hors-contexte G suivante :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S}
T = {0, 1}
P = { S → 0 | 0 S
S → 1 S S | S 1 S | S S 1 }

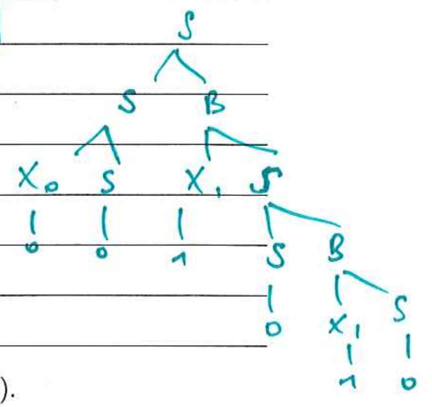
1. Transformez G en une grammaire G' équivalente sous Forme Normale de Chomsky (toutes les productions seront de la forme $A \to BC$ ou $A \to a$ avec A, B, C non-terminaux et a terminal).

$G' = (N', T, P', S)$ avec $N' = \{S, X_0, X_1, A, B\}$

$P' = \{$
$S \to 0 \mid X_0 S$
$S \to X_1 A \mid S B \mid A X_1$
$A \to SS$
$B \to X_1 S$
$X_0 \to 0$
$X_1 \to 1$ $\}$

2. Procédez à l'analyse du mot 001010 par l'algorithme de Cocke, Younger et Kasami (CYK). S'il appartient au langage $L(G)$, déduisez-en un arbre de dérivation de ce mot pour la grammaire G'.

0	0	1	0	1	0
$S X_0$	$S X_0$	X_1	$S X_0$	X_1	$S X_0$
$A S$		B		B	
S	S		S		
$A S$		B			
S	S				
$S A$					



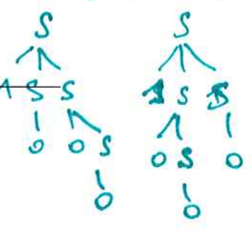
$S \in$
donc $001010 \in L(G)$

3. Listez tous les facteurs du mot 001010 qui appartiennent au langage $L(G)$.

0 00 001 010
0010 00101 01010 et 001010 lui-même

4. La grammaire G initiale est-elle ambiguë ? Pourquoi ?

Oui, elle est ambiguë car par exemple le mot 1000 a 2 dérivations les plus à gauche distinctes



5. Finalement, quel est le langage engendré par la grammaire G ?

$L(G) = \{ w \in \{0,1\}^*, \ |w|_0 > |w|_1 \}$

Exercice 4 : **(4 points)** On considère le langage des carrés écrits en unaire :

$$L = \{1^{k^2}, k > 0\}$$

Montrez en utilisant le lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte que ce langage L n'est pas hors-contexte.

Supposons par l'absurde que L est hors-contexte.
Le lemme est vérifié pour un entier $n \geq 1$.
Cherchons un contre-exemple :
Prenons le mot $p = 1^{n^2} \in L$, on a bien $|p| = n^2 \geq n$.
Pour toute factorisation de p en $uvwxy$ telle que :

$$\begin{cases} |vx| > 0 & (1) \\ |vwx| \leq n & (2) \\ |w| > 0 & (3) \end{cases}$$

On cherche un entier i tel que $p_i = uv^iwx^iy \notin L$.
Prenons $i = 2$: $p_2 = uv^2wx^2y$ donc
$|p_2| = |p| + |vx| = n^2 + |vx|$. D'après (1),
$n^2 < |p_2|$ et d'après (2) et (3), $|p_2| < n^2 + n < n(n+1) < (n+1)^2$
donc $n^2 < |p_2| < (n+1)^2$ ainsi $p_2 \notin L$: contradiction.
Notre supposition est fausse. On conclut que L n'est pas hors-contexte.

Exercice 5 : **(3 points)** Considérons une grammaire G suivante :

Grammaire G

Axiome = A
N = { X, Y, Z }
T = { 0, 1, 2 }
P = { X → 1 X Y Z
X → 1 Y Z
Z Y → Y Z
0 Y → 0 0
1 Y → 1 0
0 Z → 0 2
2 Z → 2 2 }

1. Cette grammaire G est-elle hors-contexte ? Pourquoi ?

Non car les parties gauches ne sont pas des élts de N.

2. Donnez un exemple de la suite de dérivations permettant d'obtenir un mot de $L(G)$ à partir de l'axiome A. On choisira un mot de longueur supérieure ou égale à 4.

$X \Rightarrow 1XYZ \Rightarrow 11YZYZ \Rightarrow 11YYZZ \Rightarrow 110YZZ \Rightarrow 1100ZZ \Rightarrow 11002Z \Rightarrow 110022$.

3. Quel est le langage $L(G)$ engendré par la grammaire G ? Est-il hors-contexte ?

$L(G) = \{1^n 0^n 2^n, n \geq 0\}$.