Université Côte d'Azur 2022–2023
Licence 3 Info – L3 Math-Info – L3 Sc. & Techn.

Automates & Langages

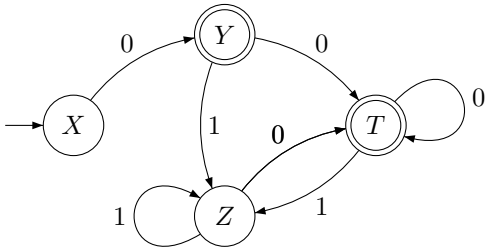
Examen du 24 octobre

Nom :
Prénom :

Durée : 1h30
Seule une feuille manuscrite recto autorisée.

Note :

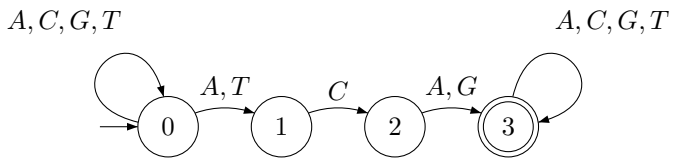
Exercice 1 : (4 points) Considérons l'automate fini $\mathcal{A}$ défini par le quintuplet $(\Sigma = \{0, 1\}, Q = \{X, Y, Z, T\}, \delta, q_0, F = \{Y, T\})$ avec la relation de transition δ suivante :



1. Posez à droite de l'automate le système d'équations correspondant à $\mathcal{A}$ et dont les inconnues sont des expressions régulières pour les langages associés à chacun des états.
2. Résolvez ce système afin de trouver une expression régulière décrivant le langage $L(\mathcal{A})$.

3. Donnez une description *en français* du langage $L(\mathcal{A})$.

Exercice 2 : **(4,5 points)** On cherche à repérer des séquences de bases azotées dans un filament d'ADN. Il y a 4 bases azotées : adénine, cytosine, glutamine et thymine qui donnent lieu à l'alphabet $\Sigma = \{A, C, G, T\}$. Voici la description d'un automate fini non-déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q = \{0, 1, 2, 3\}, \delta, 0, F = \{3\})$ pour reconnaître les motifs voulus, sa relation de transition δ se déduit aisément du schéma suivant :



1. Appliquez l'algorithme de déterminisation à l'automate $\mathcal{A}$ afin d'obtenir l'automate $\mathcal{D}$ équivalent.

2. Appliquez l'algorithme de minimisation à l'automate $\mathcal{D}$ afin d'obtenir l'automate minimal $\mathcal{M}$. Dessinez-le en haut de la page à droite. Vous détaillerez toutes les étapes de l'algorithme depuis $\approx_0$.

Exercice 3 : (3,5 points) Le langage $L(\mathcal{A})$ de l'Exercice 3 précédent est clairement décrit par l'expression régulière :

$$(A + C + G + T)^* \; (A + T) \; C \; (A + G) \; (A + C + G + T)^*$$

En utilisant la méthode des résiduels, calculez ses états afin de retrouver l'automate fini minimal $\mathcal{M}$ reconnaissant ce langage.

Exercice 4 : **(4 points)** Montrez à l'aide du lemme de l'étoile que le langage ci-dessous n'est pas rationnel :

$$L = \{m \in \{0,1\}^*, |m|_0 < |m|_1\}$$

Exercice 5 : **(4 points)** Considérons les quatre grammaires hors-contexte suivantes :

$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_1, S)$

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to \varepsilon \mid 0A \mid 1B \\ A \to S\,0 \mid 0 \\ B \to S\,1 \mid 1 \end{array} \right\}$$

$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_2, S)$

$$P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0S \mid 1A \\ A \to 0 \mid 0B \mid 1A \\ B \to 1A \mid 0S \end{array} \right\}$$

$G_3 = (\{S\}, \{0, 1\}, P_3, S)$

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 1 \mid S1 \\ S \to 0SS \mid S0S \mid SS0 \end{array} \right\}$$

$G_4 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_4, S)$

$$P_4 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0B \mid 1A \\ A \to 0 \mid 0S \mid 1AA \\ B \to 1 \mid 1S \mid 0BB \end{array} \right\}$$

Retrouvez pour chaque grammaire précédente son langage parmi les 8 suivants :

L_1 : les mots finissant par 10
L_2 : les mots ayant plus de 0 que de 1
L_3 : les palindromes de longueur paire
L_4 : les mots ayant autant de 0 que de 1
L_5 : les mots de Dyck sur l'alphabet $\{0, 1\}$
L_6 : les mots finissant par 01
L_7 : les mots ayant plus de 1 que de 0
L_8 : les palindromes de longueur impaire

$L(G_1) =$ ..... $L(G_2) =$ ..... $L(G_3) =$ ..... $L(G_4) =$ .....