Université Côte d'Azur 2022–2023
Licence 3 Info – L3 Math-Info – L3 Sc. & Techn.

Automates & Langages

Examen du 5 janvier

Nom :

Prénom :

Durée : 1h30
Seule une feuille manuscrite recto autorisée.

Note :

Exercice 1 : (3 points) On définit la machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \sharp, F)$ par les ensembles : $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Gamma = \{X, Y, \sharp\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, q_0 est l'état initial et $F = \{q_5\}$. La relation de transition δ est décrite par les quintuplets ci-dessous :

(q_0, Y, q_0, Y, D)	$(q_1, 1, q_2, Y, G)$	$(q_0, 1, q_3, X, D)$	$(q_4, 1, q_4, 1, G)$
$(q_0, 0, q_1, X, D)$	$(q_2, 0, q_2, 0, G)$	$(q_3, 1, q_3, 1, D)$	(q_4, Y, q_4, Y, G)
$(q_1, 0, q_1, 0, D)$	(q_2, Y, q_2, Y, G)	(q_3, Y, q_3, Y, D)	(q_4, X, q_0, X, D)
(q_1, Y, q_1, Y, D)	(q_2, X, q_0, X, D)	$(q_3, 0, q_4, Y, G)$	$(q_0, \sharp, q_5, \sharp, D)$

1. Dessinez la machine de Turing $\mathcal{M}$.

2. Expliquez très brièvement le fonctionnement de $\mathcal{M}$.

3. Quel est le langage $L(\mathcal{M})$ reconnu par $\mathcal{M}$?

Exercice 2 : (5 points) On rappelle que le langage de Dyck $\mathcal{D}$ est le langage des mots bien parenthésés. On le considère ici sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ (la parenthèse ouvrante est notée 0 et la fermante 1). Soit $L = \Sigma^* \setminus \mathcal{D}$ le complémentaire du langage de Dyck (autrement dit, le langage des mots mal parenthésés).

1. Donnez le schéma d'un automate à pile qui reconnaît L. *On cherchera un automate ayant 3 états maximum et un seul symbole de pile autre que le symbole de fond de pile $\mathcal{Z}$.*

2. Construisez une grammaire hors-contexte G pour engendrer le langage L. Précisez si cette grammaire G est ambiguë ou pas.

Exercice 3 : **(5 points)** Considérons la grammaire hors-contexte G suivante :

Grammaire G
Axiome = S
N = {S, A}
T = {0, 1, 2}
P = { S $\rightarrow$ 0 S 2 | 0 A 2 | 0 2
A $\rightarrow$ 1 A 2 | 1 2 }

1. La grammaire G est propre. Mettez-la sous Forme Normale de Chomsky (toutes les productions seront de la forme $A \rightarrow BC$ ou $A \rightarrow a$ avec A, B, C non-terminaux et a terminal).

2. Procédez à l'analyse du mot 001222 par l'algorithme de Cocke, Younger et Kasami (CYK) afin de décider si ce mot appartient ou pas au langage $L(G)$.

3. Précisez au passage tous les autres facteurs du mot 001222 appartenant au langage :

4. Quel est donc le langage engendré par la grammaire G ?

Exercice 4 : (4 points) Répondez aux questions suivantes en argumentant brièvement :

1. La classe des langages récursifs est-elle close par complémentation ?
2. Qu'est-ce qu'une fonction non calculable ?
3. Le complémentaire d'un langage contextuel qui n'est pas hors-contexte peut-il être hors-contexte ?
4. L'ensemble des automates cellulaires élémentaires est-il dénombrable ?

Exercice 5 : (3 points) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G
Axiome = S
N = {S, A, B, C, D}
T = {a, b}
P = { S → C D
C → a C A ∣ b C B ∣ ε
A D → a D
B D → b D
A a → a A
A b → b A
B a → a B
B b → b B
D → ε }

1. Pourquoi cette grammaire G est-elle contextuelle ?
2. Écrivez la dérivation d'un mot de longueur au moins 6.
3. Quel est le langage engendré par cette grammaire ?