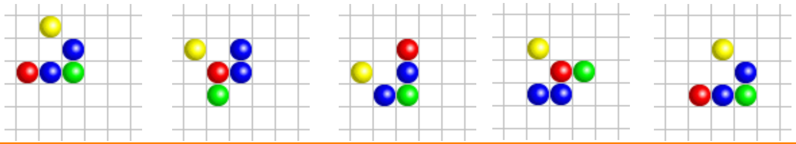
12 - Automates cellulaires

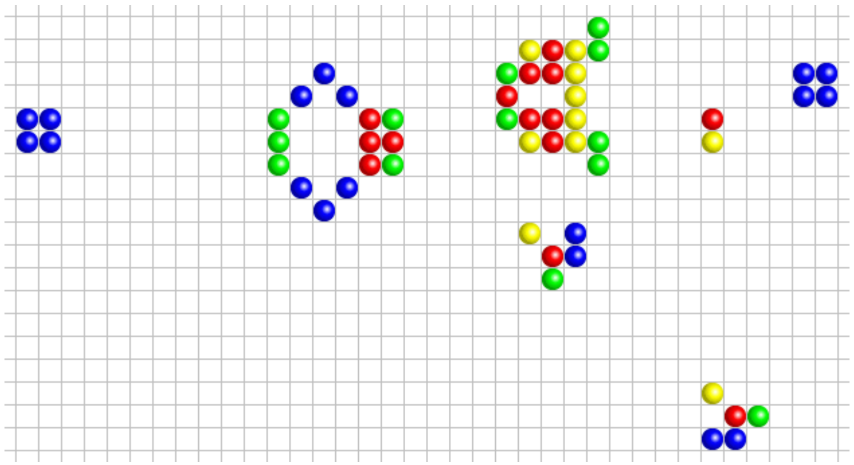
Image Wikipédia

Introduction

- un automate cellulaire (AC) est une machine abstraite remarquable dans la mesure où son fonctionnement est très simple et qu'elle peut avoir un comportement fort compliqué
- de façon surprenante, les AC ont beaucoup d'applications
- son mécanisme peut rappeler celui du fonctionnement de la molécule d'ADN, découverte après !
- le plus célèbre des AC est le « Jeu de la vie » de John H. Conway, il date de 1970 et est à l'origine de la popularisation des AC *(« Game of Life » en anglais)*



Exemple



Historique

- A l'origine, vers 1940, S. Ulam s'intéressait à la croissance de cristaux et à l'évolution de constructions graphiques engendrées par des règles simples
- en parallèle, J.von Neumann, fort des travaux de A. Turing, étudie les automates autoréplicateurs et nomme sa machine : le « kinématon »

  ☛ cf. « 2001 Odyssée de l'espace », pour transformer Jupiter en étoile, un premier monolithe se reproduit, les descendants font de même, la population croît ainsi de façon exponentielle pour atteindre rapidement la taille nécessaire à la réalisation d'une tâche aussi gigantesque ...

John von Neumann (1903-1957)

- le résultat fut le « copieur et constructeur universel » (*universal copier and constructor en anglais*), le premier AC : il était basé sur une grille à 2 dimensions où chaque cellule pouvait prendre 29 états
- Von Neumann y construisit un motif particulier et démontra qu'il pouvait produire sans fin des copies de lui-même.

Intérêt & applications

- Modèle de calcul équivalent aux machines de Turing
- Modélisation des systèmes complexes (propagation des feux de forêt, processus de percolation, écoulement du sable ...)
- Modélisation du comportement d'un gaz
- Système dynamique discret alternatif au modèle physique des équations aux dérivées partielles
- Modélisation de la croissance de tissus cellulaires en biologie
- Simulation de la croissance des cristaux
- Correction automatique d'erreurs en imagerie
- Étude des matériaux magnétiques selon le modèle d'Ising
- Conception d'ordinateurs massivement parallèles
- Simulation et étude du développement urbain (ségrégation)
- Modélisation du trafic routier
- Art (générateurs graphiques)
- ...

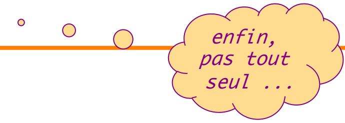
Principe

- un automate cellulaire (AC) de dimension 1 est une ligne bi-infinie de cellules indexées par les entiers relatifs
  $i \in \mathbb{Z}$

- le temps est discrétisé : chaque cellule calcule son nouvel état au temps t+1 en fonction de son propre état au temps t et des états de ses cellules voisines toujours au temps t
- l'évolution des cellules a donc lieu de façon synchrone

- la règle ou fonction locale d'évolution est la même pour chaque cellule : c'est le principe d'uniformité
- en dimension 1, le voisinage de von Neumann de la cellule i est constitué des cellules n° i-1 et n° i+1

- l'évolution débute sur une configuration initiale : chaque cellule est dans un état donné à l'instant de départ t = 0
- par défaut, une cellule est initialisée à l'état quiescent #
- un automate cellulaire ne s'arrête pas.



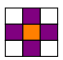
Voisinages

Dimension 1 :

- le voisinage de Moore coïncide avec le voisinage de von Neumann :

Dimension 2 :

- voisinage de Moore : 

- voisinage de von Neumann : 

(il en existe d'autres : Moore étendu, Margolus, Toom ...)

Définition

Un automate cellulaire est un quintuplet $\mathcal{A} = (d,V,Q,\delta,\#)$ où :

- d est la dimension
- V est le voisinage
- Q est un ensemble fini d'états
- δ est la fonction de transition
- # est l'état quiescent

En dimension 1 :

- la fonction de transition locale est :

$$\delta \ : \ (Q \times Q \times Q) \rightarrow Q$$

- si c(i,t) dénote l'état de la cellule i au temps t, on a :

$$c(i,t+1) = \delta \ \big(\ c(i-1,t),\ c(i,t),\ c(i+1,t) \ \big)$$

- l'évolution des cellules d'un AC unidimensionnel produit un diagramme espace-temps (2D donc) fait de la juxtaposition des configurations successives.

Dimension 1 : exemple

Soit l'automate cellulaire $\mathcal{A}$ = $(1,V_{\mathcal{VN}},Q,\delta,0)$ où Q = {0,1} et δ est ainsi définie :

$\delta(0,0,0) = 0$ $\delta(1,0,0) = 1$
$\delta(0,0,1) = 1$ $\delta(1,0,1) = 0$
$\delta(0,1,0) = 0$ $\delta(1,1,0) = 0$
$\delta(0,1,1) = 0$ $\delta(1,1,1) = 0$

Les images des 8 triplets peuvent être vues comme formant un nombre binaire : ceci est à la base de la numérotation de Wolfram des AC à 1 dimension et à 2 états. Ici, on a donc défini l'AC n° 18.

$\mathcal{A}$ engendre une fractale, le Triangle de Sierpinski sur la configuration initiale :

$^{\infty}0\ 1\ 0^{\infty}$

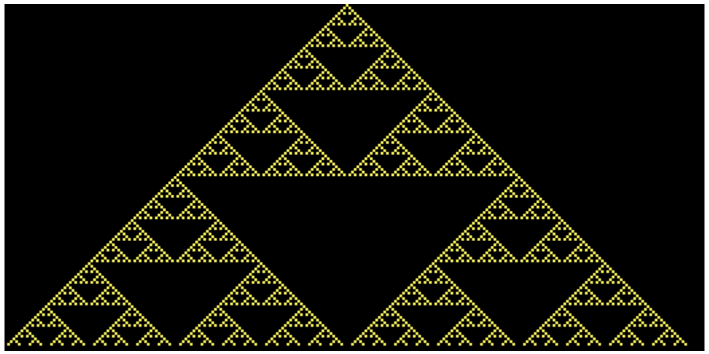
Waclaw Sierpinski
(1882-1969)
Mathématicien polonais.

Dimension 1 : exemple

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0
0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0
1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1
.
.
.

temps

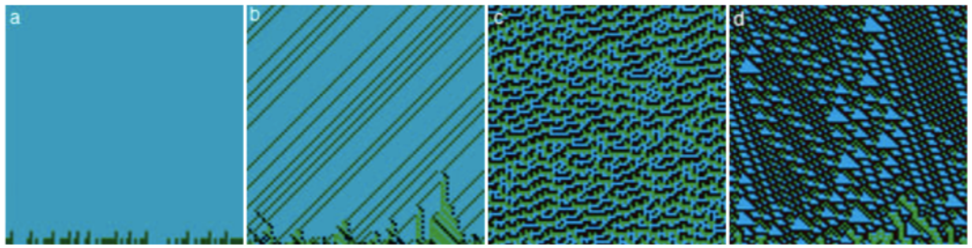
Triangle de Sierpinski



Diagrammes espace-temps et classes d'AC

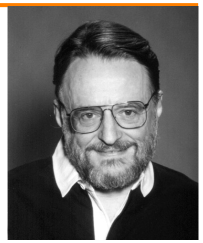
La *classification de S. Wolfram* (1983) distingue 4 classes d'automates cellulaires élémentaires en fonction de l'aspect de leurs diagrammes-temps :

(a) monotone
(b) périodique
(c) chaotique
(d) et au-delà avec l'apparition de « particules »



Images : M. Delorme/J. Mazoyer

Dimension 2 : exemple


J.H.Conway (1937-2020)
Mathématicien britannique

Automate cellulaire du Jeu de la Vie (1970)

$B = (2, V_{Moore}, \{■, ■\}, \delta, ■)$

➢ deux états : ■ (cellule morte)
■ (cellule vivante)

➢ voisinage de Moore à 8 voisins

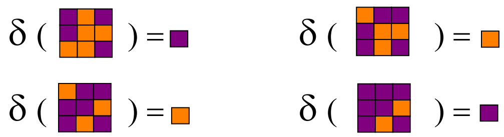
➢ δ est définie conformément à :

- si la cellule est vivante et entourée par 2 ou 3 cellules vivantes, elle reste vivante ; sinon, elle meurt soit par surpopulation, soit par isolement :-(

- si la cellule est morte mais entourée par exactement 3 cellules vivantes, elle (re)naît !!!

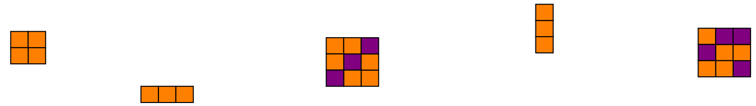
Jeu de la Vie

Soit l'automate cellulaire $B = (2, V_{Moore}, Q, \delta, ■)$ où $Q = \{■, ■\}$ et δ ainsi définie :



et ainsi de suite pour tous les carrés 3 x 3 possibles ...

Que dire de ces configurations ?



- intermède Golly -

Propriétés de AC

- nilpotent
  - toute configuration mène à terme à une configuration uniforme
- linéaire
  - la règle de transition renferme une dépendance linéaire entre les états des cellules
    - par exemple les AC additifs
- surjectif
  - à terme, n'importe quelle configuration peut être atteinte
- réversible
  - la fonction globale est bijective
- totalistique
  - l'évolution d'une cellule ne dépend que de ses voisines
- calculateur
  - l'automate est utilisé pour calculer une fonction.

Universalité

Rappels :

- une machine universelle est une machine capable de simuler le comportement de n'importe quelle autre machine semblable
- il existe une machine de Turing universelle *i.e.* qui peut simuler l'exécution de n'importe quelle autre machine de Turing

- l'automate cellulaire du « Jeu de la Vie » est lui un automate cellulaire universel dans la mesure où il peut mimer une machine de Turing universelle
- les automates cellulaires ont donc la même puissance de calcul que les machines de Turing
  le modèle des MT est séquentiel là où celui des AC est massivement parallèle
- il existe aussi des AC *intrinsèquement universels.*

Prix règle 30

https://www.rule30prize.org/

Un problème de synchronisation

- problème introduit par J. Myhill en 1957
- premiers écrits : E.F.Moore, 1962

  Donnée

  un automate cellulaire 1D

  Problème

  trouver une règle de transition de telle sorte que toutes les cellules entrent en même temps dans un état identique et jamais encore utilisé

- analogie *(pas terrible)* avec la synchronisation d'une ligne de fusiliers*

- première solution : E.F.Moore, 1962
- amélioration à 15 états : M. Minsky, 1967
  - ➢ *voir illustration ci-après*

- solution à **6 états** et en temps minimal : J. Mazoyer, 1988 (preuve aussi de la non-existence d'une solution à **4 états**)

à 5 états, on cherche ...

* en anglais : « *Firing Squad Synchronization Problem* »

Solution de Minsky