Université Côte d'Azur — L3 Info, L3 MI, L3 ST
Automates & Langages — 2023–24

TD n° 11

Machines de Turing

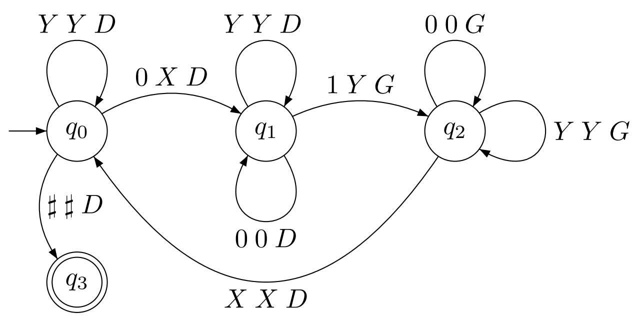
Exercice 1) Modifiez la machine de Turing du cours afin de reconnaître le langage contextuel :

$$L = \{a^n b^n c^n, n > 0\}$$

Estimez la complexité de cette machine de Turing.

Exercice 2) La machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \sharp, F)$ est définie par les ensembles ci-dessous et par les transitions de δ décrites dans le schéma suivant :

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\Gamma = \{0, 1, X, Y, \sharp\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $F = \{q_3\}$



Quel est le langage L reconnu par la machine de Turing $\mathcal{M}$? Expliquez brièvement pourquoi.

Exercice 3) Trouvez une machine de Turing qui reconnaisse chacun des langages suivants :

1. $L_1 = \{w2w, w \in \{0, 1\}^+\}$
2. $L_2 = \{ww, w \in \{0, 1\}^+\}$.

Pour le langage L_2, il existe une solution évidente qui s'inspire de la solution pour L_1 et qui est *non-déterministe*. Concevez aussi le scénario d'une machine de Turing équivalente et déterministe.

Exercice 4) On se propose de réfléchir à la construction d'une machine de Turing pour accepter les mots dont la longueur est une puissance entière de 2. Autrement dit, la machine doit reconnaître le langage L suivant :

$$L = \{1^{2^i}, i \geq 0\}$$

On fixe à 3 le nombre de rubans (semi-infinis) de cette machine. Au départ, l'entrée w est sur le ruban n° 1 et le caractère 1 représentant 2^0 sera mis d'emblée sur le ruban n° 2. Concevez un scénario pour le fonctionnement d'une telle machine de Turing.

Exercices complémentaires

Exercice 5) Le *bit de parité* d'un mot binaire compte le nombre de $1 \mod 2$ contenus dans ce mot. Considérons l'ensemble L des mots binaires non-vides augmentés de leur bit de parité :

$$L = \{0\mathbf{0}, 1\mathbf{1}, 00\mathbf{0}, 01\mathbf{1}, 10\mathbf{1}, 11\mathbf{0}, 000\mathbf{0}, ...\}$$

1. Quel est la nature de ce langage *(rationnel, hors-contexte, contextuel)* ?
2. Construisez une machine de Turing à un seul ruban semi-infini qui écrit le bit de parité à la fin d'un mot binaire non-vide donné en entrée.

Exercice 6) La machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, \sharp, F)$ est définie comme suit :
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $\Gamma = \{X, Y, \sharp\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, q_0 est l'état initial et $F = \{q_5\}$. La relation de transition δ est décrite par les quintuplets ci-dessous :

(q_0, Y, q_0, Y, D)	$(q_1, 1, q_2, Y, G)$	$(q_0, 1, q_3, X, D)$	$(q_4, 1, q_4, 1, G)$
$(q_0, 0, q_1, X, D)$	$(q_2, 0, q_2, 0, G)$	$(q_3, 1, q_3, 1, D)$	(q_4, Y, q_4, Y, G)
$(q_1, 0, q_1, 0, D)$	(q_2, Y, q_2, Y, G)	(q_3, Y, q_3, Y, D)	(q_4, X, q_0, X, D)
(q_1, Y, q_1, Y, D)	(q_2, X, q_0, X, D)	$(q_3, 0, q_4, Y, G)$	$(q_0, \sharp, q_5, \sharp, D)$

1. Dessinez la machine de Turing $\mathcal{M}$.
2. Quel est le langage $L(\mathcal{M})$ reconnu par $\mathcal{M}$?

Exercice 7) On considère le langage des nombres premiers écrits en unaire :

$$P = \{1^p, p \text{ premier}\}$$

Imaginez le scénario d'une machine de Turing $\mathcal{M}$ pour reconnaître ce langage.

Exercice 8) Montrez que les définitions suivantes sont équivalentes :

1. Une fonction $f : X^* \longrightarrow X^*$ est appelée *MT-calculable*$_1$ s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}_1$ avec $L(\mathcal{M}_1) = \{w\$v \mid w \in X^* \text{ et } v = f(w)\}$.
2. Une fonction $f : X^* \longrightarrow X^*$ est appelée *MT-calculable*$_2$ s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M}_2$ qui, étant donné $w \in X^*$ en entrée, s'arrête avec la sortie $v = f(w)$ écrite sur le ruban.

Exercice 9) Expliquez l'équivalence entre une machine de Turing et un automate ... à 2 piles.

Exercice 10) Trouvez les *Castors Affairés* pour les valeurs $n = 1$ et $n = 2$. Ou cherchez-les sur le *web* !