

TD n° 10

Clôture des langages hors-contexte

Exercice 1) Montrez grâce au lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte que les langages suivants ne sont pas hors-contexte :

1. $L = \{ww, w \in \{0, 1\}^*\}$;
2. $P = \{1^p, p \text{ premier}\}$.

Exercice 2) En utilisant les propriétés de clôture de la classe des langages hors-contexte, montrez que le langage suivant n'est pas hors-contexte :

$$L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \text{ avec } |w|_0 = |w|_1 = |w|_2\}$$

Exercice 3) Considérons la grammaire contextuelle G suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Grammaire } G \\ \hline \text{Axiome} = S \\ N = \{S, A, B, C\} \\ T = \{1\} \\ P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow B A B \\ B A \rightarrow B C \\ C B \rightarrow A A B \\ C A \rightarrow A A C \\ A \rightarrow 1 \\ B \rightarrow \varepsilon \end{array} \} \end{array}$$

1. Quel est le langage $L(G)$ engendré par la grammaire G précédente ?
2. Quelle est, à votre avis, la nature du langage $L(G)$ (rationnel, hors-contexte ou contextuel) ?

Exercices complémentaires

Exercice 4) On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$. Considérons le langage suivant :

$$L = \{0^i 1^j 2^i 3^j \text{ avec } i \geq 1 \text{ et } j \geq 1\}$$

Montrez grâce au lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte que L n'est pas hors-contexte.

Exercice 5) Trouvez une grammaire contextuelle qui engendre le langage contextuel L suivant :

$$L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \text{ tels que } |w|_0 = |w|_1 = |w|_2\}$$

Exercice 6) Considérons la grammaire G suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Grammaire } G \\ \hline \text{Axiome} = S \\ N = \{S, X, Y, Z, B\} \\ T = \{a, b, c, d\} \\ P = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow XY \\ X \rightarrow aXc \mid aZc \\ Y \rightarrow BYd \mid Bd \\ cB \rightarrow Bc \\ bB \rightarrow Bb \\ ZB \rightarrow Zb \\ Z \rightarrow \varepsilon \end{array} \} \end{array}$$

1. Cette grammaire G est-elle hors-contexte ? Pourquoi ?
2. Quel est le langage $L(G)$ engendré par cette grammaire ? Est-il hors contexte ?