Université Côte d'Azur — L3 Info, L3 MI, L3 ST
Automates & Langages — 2024–25

TD n° 9

Automates à pile (suite)
Grammaires contextuelles

Exercice 1) Considérons à nouveau la grammaire hors-contexte suivante :

Grammaire G
Axiome = S
N = {S, T }
T = {0, 1, 2}
P = { S → 0 S 2 | 0 T 2 | 0 2
T → 1 T 2 | 1 2

1. Quel est le langage engendré par la grammaire G ?
2. Passez directement de G à un automate à pile à un seul état reconnaissant $L(G)$ *(on vous demande d'utiliser la seconde version de l'algorithme du cours sans utiliser le fait que cette grammaire soit, de façon fortuite, sous Forme Normale de Greibach).*

Exercice 2) On se propose de construire l'intersection de 2 langages, l'un rationnel, l'autre hors-contexte non rationnel. Pour cela, on utilise la même idée que pour faire l'intersection de 2 langages rationnels.

1. Plaçons-nous sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Soit L le langage des suites alternées de 0 et de 1. Donnez l'automate minimal $\mathcal{A}_L$ de ce langage qui est clairement rationnel.
2. Soit K le langage des palindromes de longueur impaire sur l'alphabet binaire. Trouvez un automate à pile $\mathcal{A}_K$ (avec reconnaissace sur états finals) pour ce langage hors-contexte non-rationnel.
3. Construisez un automate à pile reconnaissant l'intersection $L \cap K$ en effectuant le *produit* des graphes des automates.

Exercice 3) La classe des langages hors-contexte n'est pas close par intersection. Cependant, l'intersection d'un langage hors-contexte et d'un langage rationnel est hors-contexte. Il peut se produire également que l'intersection de 2 langages *hors-contexte non-rationnels* soit hors-contexte. Donnez un exemple d'un tel couple de langages.

Exercice 4) Voici une grammaire G qui n'est pas hors-contexte :

Grammaire G

Axiome = X
N = { X, Y, Z }
T = { 0, 1, 2 }
P = { X → 1 X Y Z
X → 1 Y Z
Z Y → Y Z
0 Y → 0 0
1 Y → 1 0
0 Z → 0 2
2 Z → 2 2 }

1. Pourquoi cette grammaire G n'est pas hors-contexte ?
2. Donnez un exemple de la suite de dérivations permettant d'obtenir un mot de $L(G)$ à partir de l'axiome A. On choisira un mot de longueur supérieure ou égale à 6.
3. Quel est le langage engendré par cette grammaire ? Est-il hors-contexte ?

Exercices complémentaires

Exercice 5) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S, X, Y, Z, B}
T = {a, b, c, d}
P = { S → X Y }
X → a X c | a Z c
Y → B Y d | B d
c B → B c
b B → B b
Z B → Z b
Z → ε

1. Cette grammaire G est-elle hors-contexte ? Pourquoi ?
2. Quel est le langage engendré par cette grammaire ? Est-il hors-contexte ?

Exercice 6) On se propose de construire l'intersection de 2 langages, le premier rationnel et le second hors-contexte non rationnel.

1. Trouvez un automate à pile $\mathcal{A}$ pour le complémentaire du langage de Dyck.
2. Trouvez l'automate fini minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant les mots qui terminent par 1 (une fermante donc).
3. Construisez alors un automate à pile $\mathcal{C}$ reconnaissant l'intersection $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$ en effectuant le *produit* des automates.