Université Côte d'Azur
Automates & Langages

L3 Info, L3 MI, L3 ST
2023–24

TD n° 9

Automates à pile (suite)
Grammaires contextuelles

Exercice 1) Considérons à nouveau la grammaire hors-contexte suivante :

Grammaire G
Axiome = S
N = {S }
T = {0, 1}
P = { S → 0 | 0 S
S → 1 S S | S 1 S | S S 1 }

1. Quel est le langage engendré par la grammaire G ?
2. Passez directement de G à un automate à pile à un état reconnaissant $L(G)$ *(on ne vous demande pas de mettre cette grammaire sous Forme Normale de Greibach mais d'utiliser la seconde version de l'algorithme du cours).*

Exercice 2) On se propose de construire l'intersection de 2 langages, l'un rationnel, l'autre hors-contexte non rationnel. Pour cela, on utilise la même idée que pour faire l'intersection de 2 langages rationnels.

1. Plaçons-nous sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Soit L le langage des mots qui commencent par 11. Donnez l'automate minimal $\mathcal{A}_L$ de ce langage clairement rationnel.
2. Toujours sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, considérons l'automate à pile $\mathcal{A}_K$ de l'Exercice 5 du TD n° 8. Quel est le langage K hors-contexte non-rationnel reconnu par cet automate à pile ?
3. Construisez un automate à pile reconnaissant l'intersection $L \cap K$ en effectuant le *produit* des graphes des automates.

Exercice 3) La classe des langages hors-contexte n'est pas close par intersection. Cependant, l'intersection d'un langage hors-contexte et d'un langage rationnel est hors-contexte. Il peut se produire également que l'intersection de 2 langages *hors-contexte non-rationnels* soit hors-contexte. Donnez un exemple d'un tel couple de langages.

Exercice 4) Voici une grammaire G qui n'est pas hors-contexte :

Grammaire G			
Axiome = S			
N = {S, A, B, C, D}			
T = {a, b}			
P = {	S	$\rightarrow$ C D	
	C	$\rightarrow$ a C A $\mid$ b C B $\mid$ ε	
	A D	$\rightarrow$ a D	
	B D	$\rightarrow$ b D	
	A a	$\rightarrow$ a A	
	A b	$\rightarrow$ b A	
	B a	$\rightarrow$ a B	
	B b	$\rightarrow$ b B	
	D	$\rightarrow$ ε	}

1. Pourquoi cette grammaire G n'est pas hors-contexte ?
2. Donnez un exemple de la suite de dérivations permettant d'obtenir un mot de $L(G)$ à partir de l'axiome A. On choisira un mot de longueur supérieure ou égale à 6.
3. Quel est le langage engendré par cette grammaire ? Est-il hors-contexte ?

Exercices complémentaires

Exercice 5) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G			
Axiome = S			
N = {S, X, Y, Z, B}			
T = {a, b, c, d}			
P = {	S	$\rightarrow$ X Y	}
	X	$\rightarrow$ a X c $\mid$ a Z c	
	Y	$\rightarrow$ B Y d $\mid$ B d	
	c B	$\rightarrow$ B c	
	b B	$\rightarrow$ B b	
	Z B	$\rightarrow$ Z b	
	Z	$\rightarrow$ ε	

1. Cette grammaire G est-elle hors-contexte ? Pourquoi ?
2. Quel est le langage engendré par cette grammaire ? Est-il hors-contexte ?

Exercice 6) On se propose de construire l'intersection de 2 langages, le premier rationnel et le second hors-contexte non rationnel.

1. Trouvez un automate à pile $\mathcal{A}$ pour le complémentaire du langage de Dyck.
2. Trouvez l'automate fini minimal $\mathcal{B}$ reconnaissant les mots qui terminent par 1 (une fermante donc).
3. Construisez alors un automate à pile $\mathcal{C}$ reconnaissant l'intersection $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$ en effectuant le *produit* des automates.