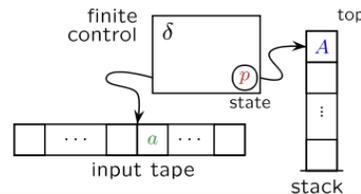


9 - Automates à pile (suite)



1

Langages HC et automates à pile

RAPPEL !!!

Théorème un langage est hors-contexte si et seulement si il est reconnu par un automate à pile

- au cours précédent, on a vu un algorithme pour construire un **automate à pile non-déterministe** à partir d'une **grammaire hors-contexte** sous F.N.G
- on peut adapter cet algorithme pour qu'il prenne en entrée une **grammaire** sous forme quelconque

on mime chaque production par une ϵ -transition produisant ainsi l'arrêt en lecture et on simule la production sur la pile de l'automate

- la réciproque du théorème se montre en construisant une **grammaire hors-contexte** à partir d'un automate à pile.

2

Grammaire HC \rightarrow A.P.N 2^e version de l'algorithme

- 1 $L = L \setminus \{\epsilon\}$ langage engendré par $G = (N, T, P, S)$
on construit $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, \emptyset)$ tel que:

- $Q = \{q_0\}$
- $\Sigma = T$
- $\Gamma = N \cup T \cup \{Z\}$
- reconnaissance sur pile vide

exceptionnellement
 $\Gamma \cap \Sigma \neq \emptyset$

- 2 posons $\delta \leftarrow \emptyset$
pour chaque $B \rightarrow \alpha$ **faire** // avec $B \in N, \alpha \in (N \cup T)^*$

$$\delta \leftarrow \delta \cup \{(q_0, \epsilon, B, q_0, \alpha^R)\}$$

- 3 **pour chaque** $a \in T$ **faire**

$$\delta \leftarrow \delta \cup \{(q_0, a, a, q_0, \epsilon)\}$$

- 4 $\delta \leftarrow \delta \cup \{(q_0, \epsilon, Z, q_0, S)\}$

le langage reconnu par A est bien $L(G) = L$

3

A.P.N \rightarrow grammaires HC

Réciproquement :

- A un APN, on construit une **grammaire hors-contexte** G telle que $L_\emptyset(A) = L(G)$
- à tout couple (q, p) d'états de Q et à tout X de la pile, on associe un **non-terminal** de la forme $\langle q, X, p \rangle$
- pour obtenir G , on mime par des productions **toutes les lectures possibles** dans A , sans **savoir a priori lesquelles vont vider la pile !** A la fin, on nettoiera juste G
- **sémantique du non-terminal** $\langle q, X, p \rangle$:
il existe un arbre de dérivation dont la racine est $\langle q, X, p \rangle$ et dont les feuilles sont les lettres de w si la lecture de w dans A à partir de l'état q avec X en sommet de pile atteint l'état p avec la même pile vidée de X .

4

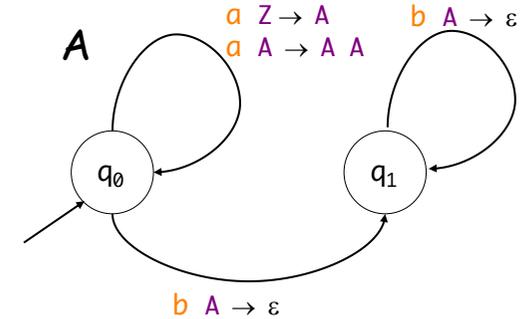
A.P.N → grammaire HC : algorithme

- 0 on part de $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, \emptyset)$
on veut construire $G = (N, T, P, S)$ équivalente
- 1 $N = \{ \langle q, X, p \rangle, p \text{ et } q \in Q, X \in \Gamma \} \cup \{ S \}$
- 2 $P \leftarrow \emptyset$ et $T = \Sigma$
- 3 pour tout état $q \in Q$, $P \leftarrow \{ S \rightarrow \langle q_0, Z, q \rangle \}$
- 4 pour toute transition $(q, a, X, p, \varepsilon)$ de δ faire
 $P \leftarrow \{ \langle q, X, p \rangle \rightarrow a \}$
- 5 pour toute transit° $(q, a, X, p, B_m \dots B_1)_{m>0}$ de δ faire
pour tout m-uplet d'états q_1, q_2, \dots, q_m de Q faire
 $P \leftarrow \{ \langle q, X, q_m \rangle \rightarrow a \langle p, B_1, q_1 \rangle \langle q_1, B_2, q_2 \rangle \dots \langle q_{m-1}, B_m, q_m \rangle \}$

5

Exemple

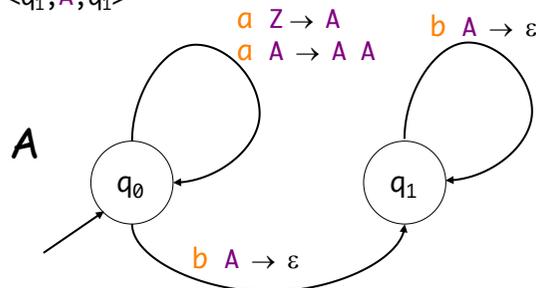
- 0 on part de $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, \emptyset)$
pour construire $G = (N, T, P, S)$
- 1 $N = \{ \langle q_0, Z, q_0 \rangle, \langle q_0, Z, q_1 \rangle, \langle q_1, Z, q_0 \rangle, \langle q_1, Z, q_1 \rangle, \langle q_0, A, q_0 \rangle, \langle q_0, A, q_1 \rangle, \langle q_1, A, q_0 \rangle, \langle q_1, A, q_1 \rangle \} \cup \{ S \}$
- 2 $P \leftarrow \emptyset$ et $T = \{ a, b \}$
- 3 P reçoit :
 $S \rightarrow \langle q_0, Z, q_0 \rangle$
 $S \rightarrow \langle q_0, Z, q_1 \rangle$
- 4 P reçoit :
 $\langle q_0, A, q_1 \rangle \rightarrow b$
 $\langle q_1, A, q_1 \rangle \rightarrow b$



6

Exemple

- 5 P reçoit :
- $\langle q_0, Z, q_0 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_0 \rangle$
 $\langle q_0, Z, q_1 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_1 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_0 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_0 \rangle \langle q_0, A, q_0 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_0 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_1 \rangle \langle q_1, A, q_0 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_1 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_0 \rangle \langle q_0, A, q_1 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_1 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_1 \rangle \langle q_1, A, q_1 \rangle$



7

Exemple

On récapitule :

- $S \rightarrow \langle q_0, Z, q_0 \rangle$
 $S \rightarrow \langle q_0, Z, q_1 \rangle$
 $\langle q_0, Z, q_0 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_0 \rangle$
 $\langle q_0, Z, q_1 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_1 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_0 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_0 \rangle \langle q_0, A, q_0 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_0 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_1 \rangle \langle q_1, A, q_0 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_1 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_0 \rangle \langle q_0, A, q_1 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_1 \rangle \rightarrow a \langle q_0, A, q_1 \rangle \langle q_1, A, q_1 \rangle$
 $\langle q_0, A, q_1 \rangle \rightarrow b$
 $\langle q_1, A, q_1 \rangle \rightarrow b$

on renomme ...

- $S \rightarrow A$
 $S \rightarrow B$
 $A \rightarrow a C$
 $B \rightarrow a D$
 $C \rightarrow a C C$
 $C \rightarrow a D E$
 $D \rightarrow a C D$
 $D \rightarrow a D F$
 $D \rightarrow b$
 $F \rightarrow b$

... et on nettoie :

- $S \rightarrow a D$
 $D \rightarrow a D b \mid b$

8

Clôture des langages hors-contexte

(premières propriétés)

9

Clôture par union

L_1 et L_2 langages hors-contexte
 \Rightarrow
 $L_1 \cup L_2$ langage hors-contexte

Démonstration par construction :

- soient $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ et $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ engendrant respectivement L_1 et L_2
- construisons G pour engendrer $L = L_1 \cup L_2$:

$$G = (\begin{array}{l} N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \\ T_1 \cup T_2, \\ S, \\ P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 \mid S_2\} \end{array})$$

en s'assurant au préalable que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ et $S \notin N_1 \cup N_2$.

10

Clôture par concaténation

L_1 et L_2 langages hors-contexte
 \Rightarrow
 $L_1 \cdot L_2$ langage hors-contexte

Démonstration par construction :

- soient $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ et $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ engendrant respectivement L_1 et L_2
- construisons G pour engendrer $L = L_1 \cdot L_2$:

$$G = (\begin{array}{l} N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \\ T_1 \cup T_2, \\ S, \\ P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\} \end{array})$$

en s'assurant au préalable que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ et $S \notin N_1 \cup N_2$.

11

Clôture par l'étoile de Kleene

L langage hors-contexte
 \Rightarrow
 L^* langage hors-contexte

Démonstration par construction :

- soit $G = (N, T, P, S)$ engendrant le langage L
- construisons G' pour engendrer L^* :

$$G' = (\begin{array}{l} N \cup \{A\}, \\ T, \\ \text{axiome } A, \\ P \cup \{A \rightarrow \varepsilon \mid S A\} \end{array})$$

en s'assurant au préalable que $A \notin N$.

12

Exemple

Une grammaire pour $L = \{a^i b^j c^k, i=j \text{ ou } j=k\}$?

L se décompose en :

- union de $\{a^i b^j c^k, i=j, k \geq 0\} \cup \{a^i b^j c^k, i \geq 0, j=k\}$

$L_1 = \{a^i b^j c^k, i=j, k \geq 0\}$

- L_1 est concaténation de $\{a^i b^j, i=j\}$ et de $\{c^k, k \geq 0\}$

$L_2 = \{a^i b^j c^k, i \geq 0, j=k\}$

- L_2 est concaténation de $\{a^i, i \geq 0\}$ et $\{b^j c^k, j=k\}$

Les langages $\{c^k, k \geq 0\}$ et $\{a^i, i \geq 0\}$

- ils sont rationnels : étoile de $\{c\}$ et de $\{a\}$.

13

Exemple (suite)

$\{a^i b^j, i=j\}$

- $S_1 \rightarrow \varepsilon \mid a S_1 b$

$\{c^k, k \geq 0\}$

- $S_2 \rightarrow \varepsilon \mid c S_2$

$L_1 = \{a^i b^j c^k, i=j, k \geq 0\}$

- $S_1 \rightarrow \varepsilon \mid a S_1 b$
- $S_2 \rightarrow \varepsilon \mid c S_2$
- $S_{L_1} \rightarrow S_1 S_2$

$L_2 = \{a^i b^j c^k, i \geq 0, j=k\}$

- $S_3 \rightarrow \varepsilon \mid a S_3$
- $S_4 \rightarrow \varepsilon \mid b S_4 c$
- $S_{L_2} \rightarrow S_3 S_4$

Une grammaire $G = (N, T, P, S)$
pour le langage :

$L = \{a^i b^j c^k, i=j \text{ ou } j=k\}$

$N = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_{L_1}, S_{L_2}, S\}$

$T = \{a, b, c\}$

$P = \{ S_1 \rightarrow \varepsilon \mid a S_1 b$
 $S_2 \rightarrow \varepsilon \mid c S_2$
 $S_{L_1} \rightarrow S_1 S_2$
 $S_3 \rightarrow \varepsilon \mid a S_3$
 $S_4 \rightarrow \varepsilon \mid b S_4 c$
 $S_{L_2} \rightarrow S_3 S_4$
 $S \rightarrow S_{L_1} \mid S_{L_2} \}$

14

Clôture par intersection

La classe des langages hors-contexte
n'est pas close par intersection

Contre-exemple :

- supposons que cette classe soit close par intersection
- le langage $L = \{a^i b^i c^i, i \geq 0\}$ n'est pas hors-contexte
(admis pour l'instant, prouvé au prochain cours ...)
- or $L = L_1 \cap L_2$ avec L_1 et L_2 les langages hors-contexte :
 $L_1 = \{a^i b^i c^k, i \geq 0, k \geq 0\}$ et $L_2 = \{a^i b^j c^j, i \geq 0, j \geq 0\}$

☞ contradiction

Mais il arrive que l'intersection de 2 langages hors-contexte soit hors-contexte, et pas seulement quand un des 2 est rationnel.

15

Complémentation

La classe des langages hors-contexte
n'est pas close par complémentation

Démonstration :

- cette classe est close par union.
- si elle était close par complémentation, elle serait forcément close par intersection, car

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

- or elle n'est pas close par intersection.

Mais il arrive qu'un langage hors-contexte (non-rationnel s'entend) ait un complémentaire hors-contexte.

16

Récapitulatif

La classe des langages hors-contexte est **close** pour :

- l'union
- la concaténation
- l'opération « étoile »

La classe des langages hors-contexte n'est **pas close** pour :

- l'intersection
- le complémentaire

Théorème : l'intersection d'un langage hors-contexte et d'un langage rationnel est **hors-contexte**.

En effet, on peut construire un automate à pile qui est le produit d'un automate fini et d'un automate à pile (avec reconnaissance sur états finals).

Exemple

