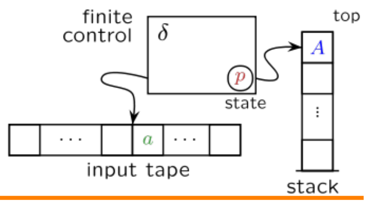
9 - Automates à pile (suite)



Langages HC et automates à pile

RAPPEL !!!

Théorème un langage est hors-contexte si et seulement si il est reconnu par un automate à pile

- au cours précédent, on a vu un algorithme pour construire un automate à pile non-déterministe à partir d'une grammaire hors-contexte sous F.N.G
- on peut adapter cet algorithme pour qu'il prenne en entrée une grammaire sous forme quelconque

  on mime chaque production par une ε-transition produisant ainsi l'arrêt en lecture et on simule la production sur la pile de l'automate

- la réciproque du théorème se montre en construisant une grammaire hors-contexte à partir d'un automate à pile.

Grammaire HC → A.P.N

2e version de l'algorithme

1 $L = L \setminus \{\varepsilon\}$ langage engendré par $G = (N,T,P,S)$

on construit $A = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0, Z,\varnothing)$ tel que:

- $Q = \{q_0\}$
- $\Sigma = T$
- $\Gamma = N \cup T \cup \{Z\}$
- reconnaissance sur pile vide

exceptionnellement $\Gamma \cap \Sigma \neq \varnothing$

2 posons $\delta \leftarrow \varnothing$

pour chaque $B \to \alpha$ faire // avec $B \in N$, $\alpha \in (N \cup T)^*$

$\delta \leftarrow \delta \cup \{ (q_0, \varepsilon, B, q_0, \alpha^R) \}$

3 pour chaque $a \in T$ faire

$\delta \leftarrow \delta \cup \{ (q_0, a, a, q_0, \varepsilon) \}$

4 $\delta \leftarrow \delta \cup \{(q_0, \varepsilon, Z, q_0, S)\}$

le langage reconnu par A est bien $L(G) = L$

A.P.N → grammaires HC

Réciproquement :

- A un APN, on construit une grammaire hors-contexte G telle que

  $$L_\varnothing(A) = L(G)$$

- à tout couple (q,p) d'états de Q et à tout X de la pile, on associe un non-terminal de la forme <q,X,p>
- pour obtenir G, on mime par des productions *toutes les lectures possibles* dans A, sans *savoir a priori lesquelles vont vider la pile !* A la fin, on nettoiera juste G
- *sémantique du non-terminal <q,X,p> :*

  il existe un arbre de dérivation dont la racine est <q,X,p> et dont les feuilles sont les lettres de w si la lecture de w dans A à partir de l'état q avec X en sommet de pile atteint l'état p avec la même pile vidée de X.

A.P.N → grammaire HC : algorithme

0 on part de $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z, \emptyset)$
on veut construire $G = (N,T,P,S)$ équivalente

1 $N = \{ \langle q,X,p\rangle,\ p \text{ et } q \in Q,\ X \in \Gamma \} \cup \{ S \}$

2 $P \leftarrow \emptyset$ et $T = \Sigma$

3 pour tout état $q \in Q$, $P \leftarrow \{ S \rightarrow \langle q_0,Z,q\rangle \}$

4 pour toute transition $(q,a,X \rightarrow p,\varepsilon)$ de δ faire
$P \leftarrow \{ \langle q,X,p\rangle \rightarrow a \}$

5 pour toute transit° $(q,a,X \rightarrow p,\ B_m \dots B_1)_{m>0}$ de δ faire
pour tout m-uplet d'états $q_1,q_2,\dots,q_m$ de Q faire
$P \leftarrow \{ \langle q,X,q_m\rangle \rightarrow a\ \langle p,B_1,q_1\rangle\ \langle q_1,B_2,q_2\rangle\ \dots\ \langle q_{m-1},B_m,q_m\rangle \}$

Exemple

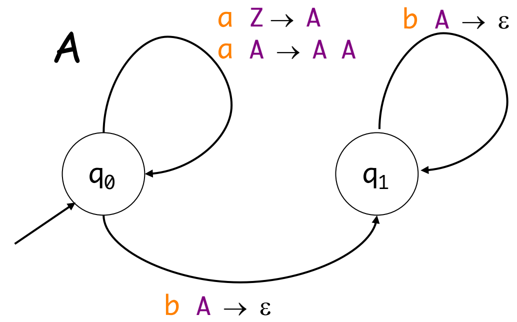
0 on part de $A = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z,\emptyset)$
pour construire $G = (N,T,P,S)$

1 $N = \{ \langle q_0,Z,q_0\rangle, \langle q_0,Z,q_1\rangle, \langle q_1,Z,q_0\rangle, \langle q_1,Z,q_1\rangle,$
$\langle q_0,A,q_0\rangle, \langle q_0,A,q_1\rangle, \langle q_1,A,q_0\rangle, \langle q_1,A,q_1\rangle \}$
$\cup \{S\}$

2 $P \leftarrow \emptyset$ et $T = \{a,b\}$

3 P reçoit :
$S \rightarrow \langle q_0,Z,q_0\rangle$
$S \rightarrow \langle q_0,Z,q_1\rangle$

4 P reçoit :
$\langle q_0,A,q_1\rangle \rightarrow b$
$\langle q_1,A,q_1\rangle \rightarrow b$

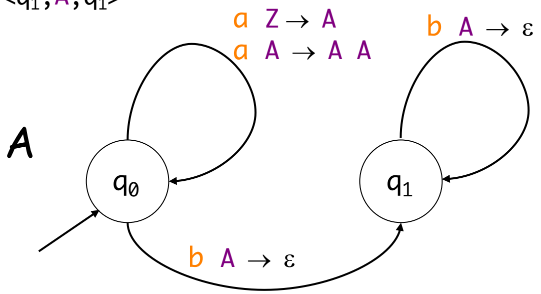


Exemple

5 P reçoit :

$\langle q_0,Z,q_0\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_0\rangle$
$\langle q_0,Z,q_1\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_1\rangle$

$\langle q_0,A,q_0\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_0\rangle\ \langle q_0,A,q_0\rangle$
$\langle q_0,A,q_0\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_1\rangle\ \langle q_1,A,q_0\rangle$
$\langle q_0,A,q_1\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_0\rangle\ \langle q_0,A,q_1\rangle$
$\langle q_0,A,q_1\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_1\rangle\ \langle q_1,A,q_1\rangle$



Exemple

On récapitule :

$S \rightarrow \langle q_0,Z,q_0\rangle$
$S \rightarrow \langle q_0,Z,q_1\rangle$

$\langle q_0,Z,q_0\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_0\rangle$
$\langle q_0,Z,q_1\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_1\rangle$

$\langle q_0,A,q_0\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_0\rangle\ \langle q_0,A,q_0\rangle$
$\langle q_0,A,q_0\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_1\rangle\ \langle q_1,A,q_0\rangle$
$\langle q_0,A,q_1\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_0\rangle\ \langle q_0,A,q_1\rangle$
$\langle q_0,A,q_1\rangle \rightarrow a\ \langle q_0,A,q_1\rangle\ \langle q_1,A,q_1\rangle$

$\langle q_0,A,q_1\rangle \rightarrow b$
$\langle q_1,A,q_1\rangle \rightarrow b$

on renomme ...

$S \rightarrow A$
$S \rightarrow B$

$A \rightarrow a\ C$
$B \rightarrow a\ D$

$C \rightarrow a\ C\ C$
$C \rightarrow a\ D\ E$
$D \rightarrow a\ C\ D$
$D \rightarrow a\ D\ F$

$D \rightarrow b$
$F \rightarrow b$

... et on nettoie :

$S \rightarrow a\ D$
$D \rightarrow a\ D\ b \mid b$

Clôture des langages hors-contexte

(premières propriétés)

Clôture par union

L_1 et L_2 langages hors-contexte
$\Rightarrow$
$L_1 \cup L_2$ langage hors-contexte

Démonstration par construction :

- soient $G_1 = (N_1,T_1,P_1,S_1)$ et $G_2 = (N_2,T_2,P_2,S_2)$ engendrant respectivement L_1 et L_2
- construisons G pour engendrer $L = L_1 \cup L_2$:

$$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$$

en s'assurant au préalable que $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ et $S \notin N_1 \cup N_2$.

Clôture par concaténation

L_1 et L_2 langages hors-contexte
$\Rightarrow$
$L_1 . L_2$ langage hors-contexte

Démonstration par construction :

- soient $G_1 = (N_1,T_1,P_1,S_1)$ et $G_2 = (N_2,T_2,P_2,S_2)$ engendrant respectivement L_1 et L_2
- construisons G pour engendrer $L = L_1.L_2$:

$$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$$

en s'assurant au préalable que $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ et $S \notin N_1 \cup N_2$.

Clôture par l'étoile de Kleene

L langage hors-contexte
$\Rightarrow$
L^* langage hors-contexte

Démonstration par construction :

- soit $G = (N,T,P,S)$ engendrant le langage L
- construisons G' pour engendrer L^* :

$$G' = (N \cup \{A\}, T, \text{axiome } A, P \cup \{A \to \varepsilon \mid S\ A\})$$

en s'assurant au préalable que $A \notin N$.

Exemple

Une grammaire pour $L = \{a^ib^jc^k, i=j \text{ ou } j=k\}$?

L se décompose en :

- union de $\{a^ib^jc^k, i=j, k\geq 0\} \cup \{a^ib^jc^k, i\geq 0, j=k\}$

$L_1 = \{a^ib^jc^k, i=j, k\geq 0\}$

- L_1 est concaténation de $\{a^ib^j, i=j\}$ et de $\{c^k, k\geq 0\}$

$L_2 = \{a^ib^jc^k, i\geq 0, j=k\}$

- L_2 est concaténation de $\{a^i, i\geq 0\}$ et $\{b^jc^k, j=k\}$

Les langages $\{c^k, k\geq 0\}$ et $\{a^i, i\geq 0\}$

- ils sont rationnels : étoile de $\{c\}$ et de $\{a\}$.

Exemple (suite)

$\{a^ib^j, i=j\}$

- $S_1 \to \varepsilon \mid a\ S_1\ b$

$\{c^k, k\geq 0\}$

- $S_2 \to \varepsilon \mid c\ S_2$

$L_1 = \{a^ib^jc^k, i=j, k\geq 0\}$

- $S_1 \to \varepsilon \mid a\ S_1\ b$
- $S_2 \to \varepsilon \mid c\ S_2$
- $S_{L_1} \to S_1\ S_2$

$L_2 = \{a^ib^jc^k, i\geq 0, j=k\}$

- $S_3 \to \varepsilon \mid a\ S_3$
- $S_4 \to \varepsilon \mid b\ S_4\ c$
- $S_{L_2} \to S_3\ S_4$

Une grammaire G = (N,T,P,S) pour le langage :

$L = \{a^ib^jc^k, i=j \text{ ou } j=k\}$

$N = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_{L_1}, S_{L_2}, S\}$

$T = \{a, b\}$

$$P = \{\ S_1 \to \varepsilon \mid a\ S_1\ b \\ S_2 \to \varepsilon \mid c\ S_2 \\ S_{L_1} \to S_1\ S_2 \\ S_3 \to \varepsilon \mid a\ S_3 \\ S_4 \to \varepsilon \mid b\ S_4\ c \\ S_{L_2} \to S_3\ S_4 \\ S \to S_{L_1} \mid S_{L_2}\ \}$$

Clôture par intersection

La classe des langages hors-contexte <u>n'est pas</u> close par intersection

Contre-exemple :

- supposons que cette classe soit close par intersection
- le langage $L = \{a^ib^ic^i, i\geq 0\}$ n'est pas hors-contexte
  (admis pour l'instant, prouvé au prochain cours ...)
- or $L = L_1 \cap L_2$ avec L_1 et L_2 les langages hors-contexte :

$L_1 = \{a^ib^ic^k, i\geq 0, k\geq 0\}$ et $L_2 = \{a^ib^jc^j, i\geq 0, j\geq 0\}$

☞ contradiction

Mais il arrive que l'intersection de 2 langages hors-contexte soit hors-contexte, et pas seulement quand un des 2 est rationnel.

Complémentation

La classe des langages hors-contexte n'est pas close par complémentation

Démonstration :

- cette classe est close par union.
- si elle était close par complémentation, elle serait forcément close par intersection, car

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

- or elle n'est pas close par intersection.

Mais il arrive qu'un langage hors-contexte (non-rationnel s'entend) ait un complémentaire hors-contexte.

Récapitulatif

La classe des langages hors-contexte est close pour :

- l'union
- la concaténation
- l'opération « étoile »

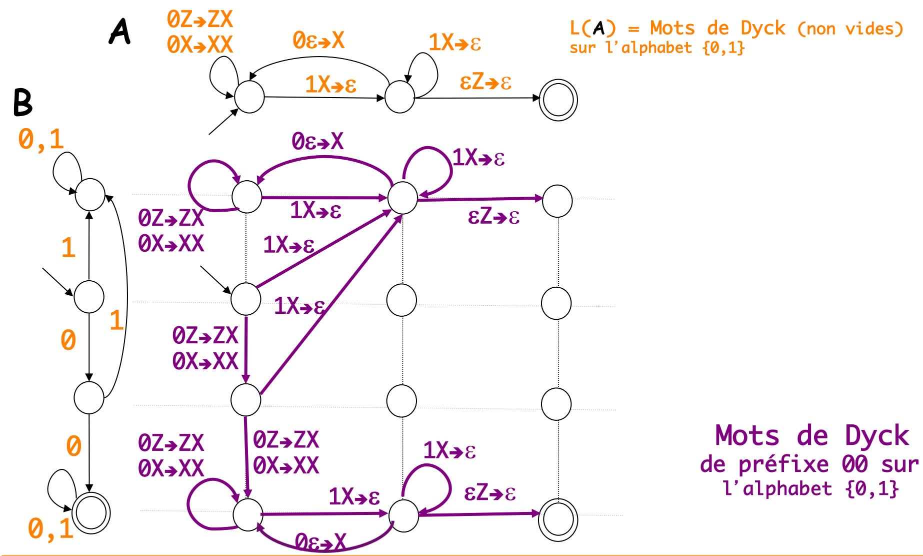
La classe des langages hors-contexte n'est pas close pour :

- l'intersection
- le complémentaire

Théorème : l'intersection d'un langage hors-contexte et d'un langage rationnel est **hors-contexte**.

En effet, on peut construire un automate à pile qui est le produit d'un automate fini et d'un automate à pile (avec reconnaissance sur états finals).

Exemple



Mots de Dyck
de préfixe 00 sur
l'alphabet {0,1}