Université Côte d'Azur
Automates & Langages

L3 Info, L3 MI, L3 ST
2024–25

TD n° 8

Automates à pile

Exercice 1) Voici la table de transition d'un automate à pile défini sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.
La table décrit la relation de transition δ de l'automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathcal{Z}, \{q_1\})$ avec $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Gamma = \{X, Y, \mathcal{Z}\}$, q_0 est l'état initial et q_1 est l'unique état final :

état	lecture	pile	nouvel état	à empiler
q_0	0	$\mathcal{Z}$	q_0	$\mathcal{Z}$ X
q_0	0	X	q_0	XX
q_0	0	Y	q_0	ε
q_0	1	$\mathcal{Z}$	q_0	$\mathcal{Z}$ Y
q_0	1	X	q_0	ε
q_0	1	Y	q_0	YY
q_0	ε	X	q_1	X
q_0	ε	Y	q_1	Y

1. L'automate à pile $\mathcal{A}$ est-il déterministe ?
2. Quel est le langage hors-contexte $L_F(\mathcal{A})$ reconnu par l'automate à pile $\mathcal{A}$, la reconnaissance se faisant sur état final ?

Exercice 2) Sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, on considére le langage hors-contexte L des palindromes de longueur paire :

$$L = \{ww^R,\ w \in \Sigma^+\}$$

1. Trouvez un automate à pile $\mathcal{A}_L$ reconnaissant le langage L sur pile vide ou sur état final. Vous préciserez tous les éléments du septuplet qui le définit.
2. Précisez si l'automate obtenu est déterministe ou pas.

Exercice 3) On rappelle que le langage de Dyck $\mathcal{D}$ est le langage des mots bien parenthésés. On le considère ici sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Soit $\mathcal{C} = \Sigma^* \setminus \mathcal{D}$ le complémentaire du langage de Dyck (autrement dit, le langage des mots mal parenthésés).

1. Trouvez un automate à pile qui reconnaît le langage $\mathcal{D}$ sur pile vide. Est-il déterministe ?
2. Trouvez un automate à pile qui reconnaît le complémentaire $\mathcal{C}$. *On cherchera un automate ayant 3 états maximum et un seul symbole de pile autre que le symbole de fond de pile $\mathcal{Z}$.*

Exercice 4) Considérons la grammaire G suivante, elle est donnée sous Forme Normale de Greibach :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S, A, B}
T = {a, b}
P = { S → a B | b A
A → a | a S | b A A
B → b | b S | a B B }

1. Rappelez quel est le langage engendré par cette grammaire.
2. En utilisant la méthode du cours, construisez directement à partir de cette grammaire un automate à pile non-déterministe reconnaissant le langage $L(G)$.

Exercices complémentaires

Exercice 5) Plaçons-nous sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Voici la table de transition δ d'un automate à pile $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathcal{Z}, \{q_2\})$ avec $Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \Gamma = \{X, \mathcal{Z}\}, q_0$ est l'état initial et q_2 est l'unique état final :

état	lecture	pile	nouvel état	à empiler
q_0	0	$\mathcal{Z}$	q_2	$\mathcal{Z}$
q_0	0	X	q_1	ε
q_0	1	$\mathcal{Z}$	q_0	$\mathcal{Z}$ X
q_0	1	X	q_0	XX
q_1	0	$\mathcal{Z}$	q_2	$\mathcal{Z}$
q_1	0	X	q_1	ε
q_2	0	ε	q_2	ε

1. L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ?
2. Quel est le langage hors-contexte $L_F(\mathcal{A})$ reconnu par l'automate à pile $\mathcal{A}$ précédent, la reconnaissance se faisant sur état final ?
3. Quel serait le langage $L_\emptyset(\mathcal{A})$ reconnu par $\mathcal{A}$ si la reconnaissance avait lieu sur pile vide ?
4. Trouvez un automate à pile $\mathcal{B}$ pour reconnaître sur pile vide le langage $L_\emptyset(\mathcal{B}) = \mathcal{L}_\mathcal{F}(\mathcal{A})$.

Exercice 6) Considérons la grammaire hors-contexte G suivante :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S,X,Y}
T = {0, 1}
P = { S → X | Y
X → 0 | 0 X | 1 X X | X 1 X | X X 1
Y → 1 | 1 Y | 0 Y Y | Y 0 Y | Y Y 0 }

1. Quel est le langage hors-contexte $L(G)$ engendré par cette grammaire ?
2. Trouvez et faites le schéma d'un automate à pile pour $L(G)$ en signalant son mode de reconnaissance. Vous l'imaginerez entièrement, sans utiliser la méthode du cours pour passer automatiquement d'une grammaire à un automate à pile. De plus, précisez si oui ou non il est déterministe.
3. Même questions que précédemment mais en utilisant cette fois la méthode du cours.