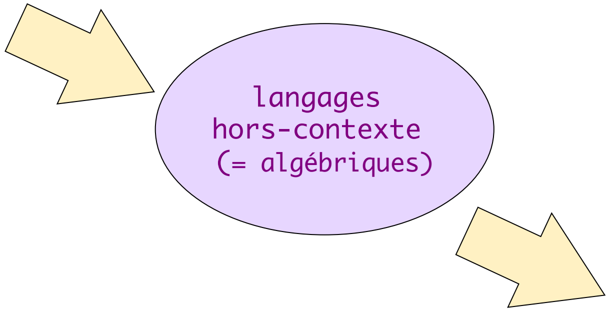
8 - Automates à pile

Récapitulatif

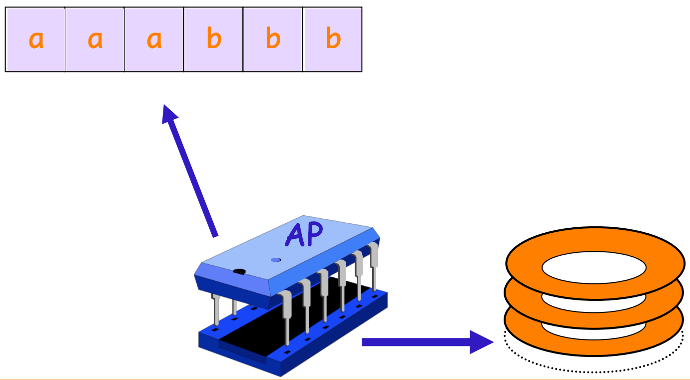
Les grammaires hors-contexte
engendrent les ...



qui sont reconnus par
des automates à pile

Fonctionnement

L'automate à pile *AP* va *analyser* le mot aaabbb :



Pourquoi une pile ?

- les automates finis n'ont pas d'autre mémoire que leurs états
- ils ne savent donc pas « compter » au-delà de leur nombre d'états
- une pile procure une mémoire additionnelle non bornée
- on accède à la pile uniquement par son sommet
- le nombre de symboles utilisés dans la pile est fini
- la pile vide peut être un critère d'acceptation des mots.

Automate à pile

Un automate à pile non-déterministe* (APN) est un septuplet $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z,F)$ avec :

- Q : ensemble fini d'états
- Σ : alphabet fini des symboles d'entrée
- Γ : alphabet fini des symboles de pile *(a priori $\Gamma \cap \Sigma = \emptyset$)*
- q_0 : état initial
- $Z \in \Gamma$: symbole initial de pile
- $F \subseteq Q$: ensemble des états terminaux
- δ est l'ensemble des règles de transition

* *pushdown automaton* en anglais

Transition

- une règle $(q,\sigma,\gamma,q',\chi)$ de transition considère :
  - l'état courant q de l'automate
  - le caractère lu σ sur le ruban (ou peut-être pas : ε)
  - le symbole γ de sommet de pile (ou peut-être pas : ε)
- une règle indique :
  - le prochain état q' de l'automate
  - la suite de symboles χ à empiler *à la place* du sommet de pile
- la relation de transition δ est l'ensemble des règles de transition vues comme des quintuplets :

$$\delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q \times \Gamma^*$$

Une restriction :
le symbole initial de pile vide Z ne peut pas être empilé une fois qu'il a été dépilé.

Mode de reconnaissance

✧ il existe 2 modes de reconnaissance pour les automates à pile selon qu'on considère $L_F(A)$ ou $L_\emptyset(A)$:

- reconnaissance par état final
- reconnaissance sur pile vide

✧ le langage accepté par A est :

- reconnaissance sur état final

$L_F(A) = \{ w \in \Sigma^*$, la pile contenant Z au départ, il existe une lecture de w depuis q_0 à f, $f \in F \}$

- reconnaissance par pile vide

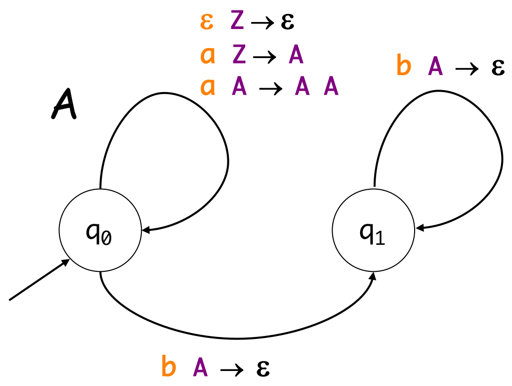
$L_\emptyset(A) = \{ w \in \Sigma^*$, la pile contenant Z au départ, il existe une lecture de w depuis q_0 qui termine avec la pile vide $\}$

Exemple (reconnaissance sur pile vide)

Automate à pile
$A = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z,\emptyset)$

mode de reconnaissance :
✧ *pile vide*

$\Sigma = \{a,b\}$
$Q = \{q_0,q_1\}$
q_0 initial
$\Gamma = \{A, Z\}$
$\delta = \{(q_0, \varepsilon, Z, q_0, \varepsilon)$
(q_0, a, Z, q_0, A)
$(q_0, a, A, q_0, A\ A)$
$(q_0, b, A, q_1, \varepsilon)$
$(q_1, b, A, q_1, \varepsilon)\}$



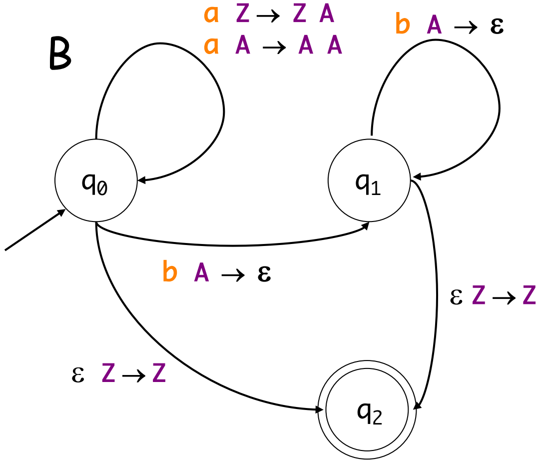
A accepte les mots du langage hors-contexte $L_\emptyset(A) = \{a^n b^n, n \geq 0\}$

Exemple (reconnaissance sur état final)

$B = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z,F)$

mode de reconnaissance :
✧ *sur état final*

$\Sigma = \{a,b\}$
$Q = \{q_0,q_1,q_2\}$
q_0 initial
$\Gamma = \{A, Z\}$
$\delta = \{(q_0,\ \varepsilon,\ Z,\ q_2,\ Z)$
$(q_0,\ a,\ Z,\ q_0,\ Z\ A)$
$(q_0,\ a,\ A,\ q_0,\ A\ A)$
$(q_0,\ b,\ A,\ q_1,\ \varepsilon)$
$(q_1,\ b,\ A,\ q_1,\ \varepsilon)$
$(q_1,\ \varepsilon,\ Z,\ q_2,\ Z)\}$
$F = \{q_2\}$



B *reconnaît* $L_\emptyset(A) = L_F(B) = \{a^n b^n, n \geq 0\}$

Equivalence

- les deux modes de reconnaissance pour les automates à pile : reconnaissance par états finals et reconnaissance sur pile vide sont équivalents

Théorème
un langage est reconnu par un automate à pile sur pile vide si et seulement si il est reconnu par un automate à pile à états finals

Justification

- sens direct : chaque état où la pile se vide, Z en étant retiré, donne lieu à une transition vers un état final inédit
- réciproquement : on fait en sorte que la pile se vide entièrement et pour la première fois, après chaque état final

Déterminisme

Condition pour qu'un automate à pile *A* soit déterministe :

- pour un état q donné
- pour un symbole d'entrée σ donné
- pour un sommet de pile γ donné

il existe au plus une transition débutant par $(q,\sigma,\gamma,\ldots)$ ou par $(q,\sigma,\varepsilon,\ldots)$ ou par $(q,\varepsilon,\gamma,\ldots)$ ou par $(q,\varepsilon,\varepsilon,\ldots)$

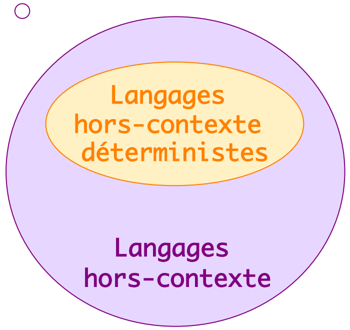
⇨ *bref, dans une configuration donnée, on ne peut pas avoir le choix quant à la transition à appliquer !*

APN *versus* APD

Théorème un langage est hors-contexte si et seulement si il est reconnu par un automate à pile

Théorème il existe des langages hors-contexte non reconnus *(admis)* par un automate à pile déterministe

A méditer (cf. TD 8) :
le langage $\{ w = w^R,\ w \in \Sigma^* \}$
n'est pas reconnu par un
AP déterministe
:-(



Grammaire hors-contexte → APN

- *Rappel* une grammaire hors-contexte $G = (N,T,P,S)$ est sous forme normale de Greibach si toute production est de la forme

$$A \to a\,\alpha$$

avec $A \in N$, $a \in T$, $\alpha \in (N \cup T)^*$

- *Rappel* il existe un algorithme permettant de transformer toute grammaire hors-contexte *propre* et sans production vide en une grammaire sous F.N.G.

- on présente ici l'algorithme de passage d'une grammaire hors-contexte sous F.N.G à un automate à pile non-déterministe

➡ *l'idée consiste à commencer par empiler l'axiome,*
puis, à chaque symbole lu de la chaîne d'entrée,
on remplace la partie gauche de la production concernée
par le reste de la partie droite ...

Algorithme

1 $L = L \setminus \{\varepsilon\}$ langage engendré par $G = (N,T,P,S)$ sous F.N.G.
on construit $\mathcal{A} = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z,\varnothing)$ tel que :
- $Q = \{q_0\}$
- $\Sigma = T$
- $\Gamma = N \cup T \cup \{Z\}$
- reconnaissance sur pile vide

exceptionnellement : $\Gamma \cap \Sigma \neq \varnothing$

2 posons $\delta \leftarrow \varnothing$
pour chaque $B \to a\,\alpha$ **faire** // avec $B \in N$, $a \in T$, $\alpha \in (N \cup T)^*$
$\quad \delta \leftarrow \delta \cup \{ (q_0, a, B \to q_0, \alpha^R) \}$

3 **pour chaque** $a \in T$ **faire**
$\quad \delta \leftarrow \delta \cup \{ (q_0, a, a \to q_0, \varepsilon) \}$

4 $\delta \leftarrow \delta \cup \{ (q_0, \varepsilon, Z \to q_0, S) \}$

le langage reconnu par $\mathcal{A}$ sur pile vide est bien $L(G) = L$

Exemple

0 $G = (N,T,P,S)$ avec
$N = \{S\}$
$T = \{a,b\}$
$P = \{S \to a \mid aa \mid b \mid bb$
$\qquad S \to aSa \mid bSb \}$
G sous F.N.G

1 $\mathcal{A} = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z,F)$
avec :
$Q = \{q_0\}$
$\Sigma = T$
$\Gamma = N \cup T \cup \{Z\}$
$F = \varnothing$
reconnaissance sur pile vide

2 posons : $\delta \leftarrow \varnothing$

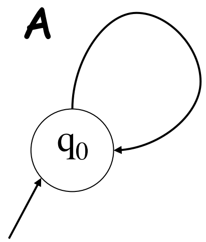
3 $\delta = \{$
$(q_0, a, S \to q_0, \varepsilon)$
$(q_0, a, S \to q_0, a)$
$(q_0, b, S \to q_0, \varepsilon)$
$(q_0, b, S \to q_0, b)$
$(q_0, a, S \to q_0, a\ S)$
$(q_0, b, S \to q_0, b\ S)$
$(q_0, a, a \to q_0, \varepsilon)$
$(q_0, b, b \to q_0, \varepsilon) \}$

4 $\delta \leftarrow \delta \cup \{ (q_0, \varepsilon, Z \to q_0, S) \}$

le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est bien :

$L = L(G) = \{ w = w^R,\ w \in \Sigma^+ \}$

Exemple

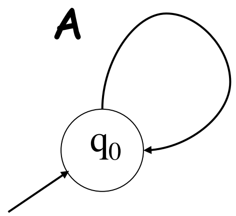


$\varepsilon\ Z \to S$
$a\ S \to \varepsilon$
$a\ S \to a$
$b\ S \to \varepsilon$
$b\ S \to b$
$a\ S \to a\ S$
$b\ S \to b\ S$
$a\ a \to \varepsilon$
$b\ b \to \varepsilon$

$\delta = \{$
$(q_0, \varepsilon, Z \to q_0, S)$
$(q_0, a, S \to q_0, \varepsilon)$
$(q_0, a, S \to q_0, a)$
$(q_0, b, S \to q_0, \varepsilon)$
$(q_0, b, S \to q_0, b)$
$(q_0, a, S \to q_0, a\ S)$
$(q_0, b, S \to q_0, b\ S)$
$(q_0, a, a \to q_0, \varepsilon)$
$(q_1, b, b \to q_0, \varepsilon) \}$

$L(\mathcal{A}) = \{ w = w^R,\ w \in \Sigma^+ \}$

Exemple



ε Z → S
a S → ε
a S → a
b S → ε
b S → b
a S → a S
b S → b S
a a → ε
b b → ε

Lecture de a b a a b a