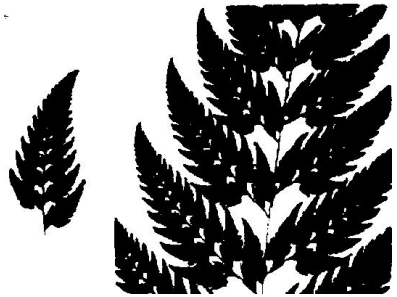


7 – Grammaires hors-contexte (suite)

RAPPEL !!!

Forme normale de Chomsky

- Une grammaire hors-contexte $G = (N,T,P,S)$ est sous forme normale de Chomsky si toute production est de la forme :

$$A \to a$$
$$A \to B\,C$$
$$S \to \varepsilon$$

avec $A,B,C \in N$ et $a \in T$ (et si on a $S \to \varepsilon$, S ne figure dans aucun membre droit d'une autre production)

- Il existe un algorithme transformant toute grammaire hors-contexte propre en grammaire sous F.N.C.

- Il existe une autre forme normale, tout aussi classique : la forme normale de Greibach dite F.N.G.

Algorithme de mise sous F.N.C.

On part de $G = (N,T,P,S)$ propre,
on construit $G' = (N',T,P',S)$ équivalente et sous F.N.C :

1 $N' \leftarrow \{S\}$
$P' \leftarrow \{A \to a,\ A \to B\,C$ *et éventuellement* $S \to \varepsilon$ pour $A,B,C \in N,\ a \in T\}$

2 pour chaque production de P de la forme :

$$A \to \alpha_1 \ldots \alpha_p \qquad \text{avec } A \in N,\ \alpha_i \in V \text{ et } p > 2$$

on ajoute à P' les productions :
$$A \to A_1\,X_1$$
$$X_1 \to A_2\,X_2$$
$$\ldots$$
$$X_{p-2} \to A_{p-1}\,A_p$$

avec soit $A_i = \alpha_i$ si $\alpha_i \in N$, soit $A_i = X_{\alpha_i}$ si $\alpha_i \in T$

3 pour chaque X_{α_i} créé précédemment, on ajoute à P' :
$$X_{\alpha_i} \to \alpha_i$$

Algorithme (suite)

4 N' reçoit les non-terminaux A_i, X_i et X_{α_i} précédemment créés

5 on remplace les productions de P de la forme :

$$A \to \alpha_1\,\alpha_2 \qquad \text{avec } \alpha_1 \text{ ou } \alpha_2 \in T$$

par des productions dans P' de la forme :

$$A \to Y_1\,Y_2$$

si $\alpha_1 \in T$ alors $Y_1 \to \alpha_1$ sinon $Y_1 = \alpha_1$
si $\alpha_2 \in T$ alors $Y_2 \to \alpha_2$ sinon $Y_2 = \alpha_2$

6 N' reçoit les Y_i précédents.

Exemple

- $G = (N, \Sigma, P, E)$ une grammaire *propre* :
  - $N = \{ E, T, F \}$
  - $\Sigma = \{ +, *, (,), i \}$
  - $P = \{ E \to E + T \mid T * F \mid (E) \mid i$
    $T \to T * F \mid (E) \mid i$
    $F \to i$
    $F \to (E) \quad \}$
  - E axiome
- $G' = (N', \Sigma', P', E)$ où pour commencer :
  - $N' = \{ E, \ldots \}$
  - $\Sigma' = \{ +, *, (,), i \}$
  - $P = \{ E \to i$
    $T \to i$
    $F \to i \quad \}$
  - E axiome

Exemple (suite)

Reste à traiter : $E \to E + T \mid T * F \mid (E)$
$T \to T * F \mid (E)$
$F \to (E)$

- $E \to E + T$ devient $E \to E\ X_1$ et $X_1 \to X_+\ T$

  $N' = \{ E, T, X_1, X_+ \}$ et $P' \leftarrow P' \cup \{ E \to E\ X_1,\ X_1 \to X_+\ T \}$

- $E \to T * F$ devient $E \to T\ X_2$ et $X_2 \to X_* F$

  $N' \leftarrow N' \cup \{ X_2, X_*, F \}$ et $P' \leftarrow P' \cup \{ E \to T\ X_2,\ X_2 \to X_*\ T \}$

- $E \to (E)$ devient $E \to X_(\ X_3$ et $X_3 \to E\ X_)$

  $N' \leftarrow N' \cup \{ X_(, X_3, X_) \}$ et $P' \leftarrow P' \cup \{ E \to X_(\ X_3,\ X_3 \to E\ X_) \}$

Exemple (suite)

Reste à traiter : $T \to T * F \mid (E)$
$F \to (E)$

- $T \to T * F$ devient $T \to T\ X_4$ et $X_4 \to X_* F$

  $N' \leftarrow N' \cup \{ X_4 \}$ et $P' \leftarrow P' \cup \{ T \to T\ X_4,\ X_4 \to X_*\ F \}$

- $T \to (E)$ devient $T \to X_(\ X_5$ et $X_5 \to E\ X_)$

  $N' \leftarrow N' \cup \{ X_5 \}$ et $P' \leftarrow P' \cup \{ T \to X_(\ X_5,\ X_5 \to E\ X_) \}$

- $F \to (E)$ devient $F \to X_(\ X_6$ et $X_6 \to E\ X_)$

  $N' \leftarrow N' \cup \{ X_6 \}$ et $P' \leftarrow P' \cup \{ F \to X_(\ X_6,\ X_6 \to E_) \}$

- on ajoute à P' les productions $X\alpha_i \to \alpha_i$, $\alpha_i \in T$ nécessaires :

  $P' \leftarrow P' \cup \{ X_+ \to +\ ,\ X_* \to *\ ,\ X_(\to (\ ,\ X_) \to)\ \}$

Exemple (fin)

- $G' = (N', \Sigma', P', E)$ sous F.N.C :
  - $N' = \{ E, T, F, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_+, X_*, X_(, X_) \}$
  - $\Sigma' = \{ +, *, (,), i \}$
  - E axiome
  - $P' = \{ E \to E\ X_1 \mid T\ X_2 \mid i$
    $T \to T\ X_4 \mid X_(\ X_5 \mid i$
    $F \to X_(\ X_6 \mid i$
    $X_1 \to X_+\ T$
    $X_2 \to X_*\ T$
    $X_3 \to E\ X_)$
    $X_4 \to X_*\ F$
    $X_5 \to E\ X_)$
    $X_6 \to E\ X_)$
    $X_+ \to +$
    $X_* \to *$
    $X_(\to ($
    $X_) \to) \quad \}$

Problème de l'appartenance

- il s'agit d'un problème de décision sur les langages hors-contexte (essentiel en compilation, traitement des langues naturelles ...)

  Données :
  - $G = (N,T,P,S)$ une grammaire hors-contexte
  - $\mu \in T^*$ un mot

  Question :
  - est-ce que $\mu \in L(G)$?

- une idée consiste à faire une analyse descendante du mot

  soit G=(N,T,P,S) telle que P ait k productions : on mime depuis l'axiome les dérivations de G. Avec G sous F.N.G, les algorithmes obtenus sont en $k^{|m|}$, $|m|$ étant la longueur du mot à traiter

- une autre idée consiste à faire une analyse ascendante du mot
  Algorithme de Cocke, Younger et Kasami (1965) :
  - il part d'une grammaire sous F.N.C.
  - il utilise l'idée de programmation dynamique vue en Algorithmique.

Idée

- Soit $G = (N,T,P,S)$ une grammaire hors-contexte sous F.N.C. pour

$$L = L(G) = L(G)\backslash\{\varepsilon\}$$

- Facteur de μ débutant à la lettre $\mu(i)$ et de longueur j :

$$\mu_{i,j} = \mu(i)\ \mu(i+1)\ \ldots\ \mu(i+j-1)$$

- Pour tout couple (i,j), on calcule l'ensemble des non-terminaux :

$$V_{i,j} = \{\ A,\ A \in N \text{ et tel que } A \Rightarrow^* \mu_{i,j}\ \}$$

- Le problème de l'appartenance se formule ainsi :

$$\mu \in L(G)\ ? \Leftrightarrow S \in V_{1,|\mu|}\ ?$$

Algorithme CYK

début

pour i **de** 1 **à** n **faire** *// initialisation 1re ligne*

$V_{i,1} \leftarrow \{A,\ A \in N,\ A \rightarrow \mu(i) \in P\}$ *// avec j fixé à 1*

pour j **de** 2 **à** n **faire**

  pour i **de** 1 **à** n-j+1 **faire** *// pour chaque case de la ligne j*

    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$

    pour k **de** 1 **à** j-1 **faire**

$$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{\ A \text{ tels que } A \rightarrow BC \in P \text{ avec } B \in V_{i,k} \text{ et } C \in V_{i+k,j-k}\ \}$$

si $S \in V_{1,|\mu|}$ **alors** *μ est engendré* par G **sinon** *non*

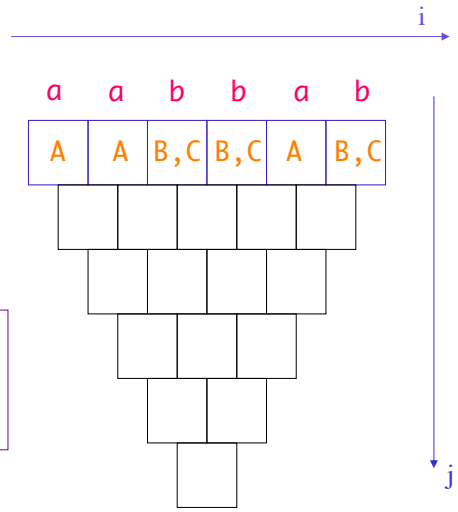
fin

Exemple

$G = (\ \{S,A,B,C\},\ T=\{a,b\},\ S,\ P)$

$P = \{\ S \rightarrow AB \mid BB$
$\quad A \rightarrow CC \mid AB \mid a$
$\quad B \rightarrow BB \mid CA \mid b$
$\quad C \rightarrow BA \mid AA \mid b\ \}$

A-t-on μ = aabbab $\in L(G)$?



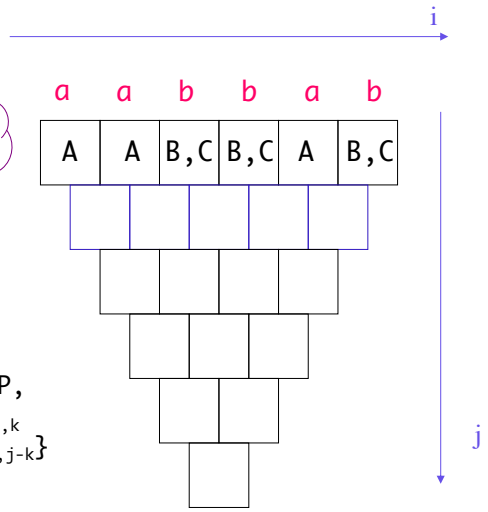
j = 1
pour i **de** 1 **à** n **faire**
  $V_{i,1} \leftarrow \{A,\ A \in N$ et $A \rightarrow \mu(i) \in P\ \}$

Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

nombre de cases par lignes

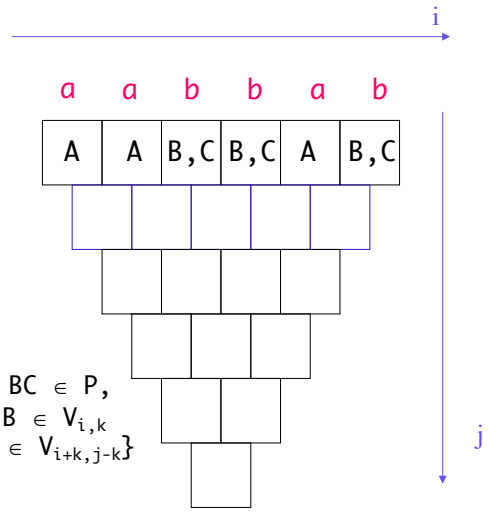
pour $j = 2$
  pour i **de** 1 **à** $n-j+1$ **faire**
    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
    pour k **de** 1 **à** $j-1$ **faire**
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        avec $B \in V_{i,k}$
        et $C \in V_{i+k,j-k}\}$



Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

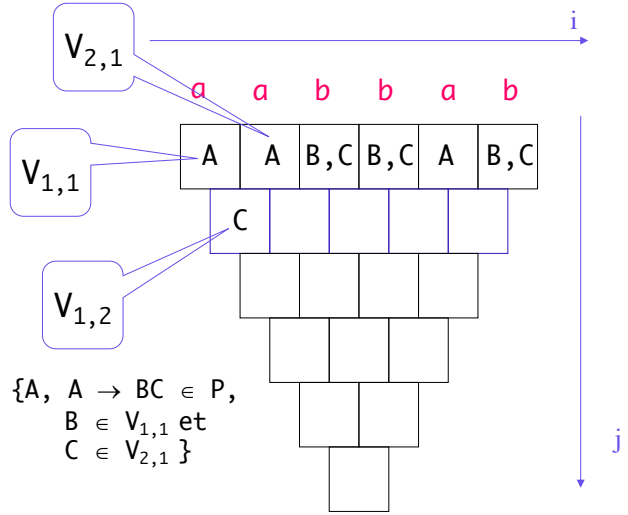
pour $j = 2$
  pour $i = 1$
    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
    pour k **de** 1 **à** $j-1$ **faire**
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        avec $B \in V_{i,k}$
        et $C \in V_{i+k,j-k}\}$



Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

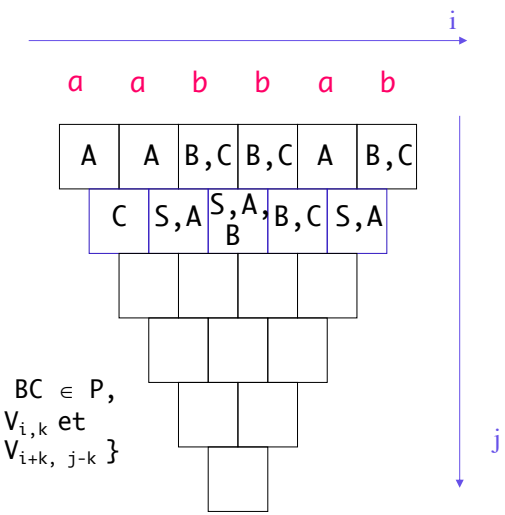
pour $j = 2$
  pour $i = 1$
    $V_{1,2} \leftarrow \varnothing$
    pour $k = 1$
      $V_{1,2} \leftarrow V_{1,2} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{1,1}$ et
        $C \in V_{2,1}\}$



Exemple

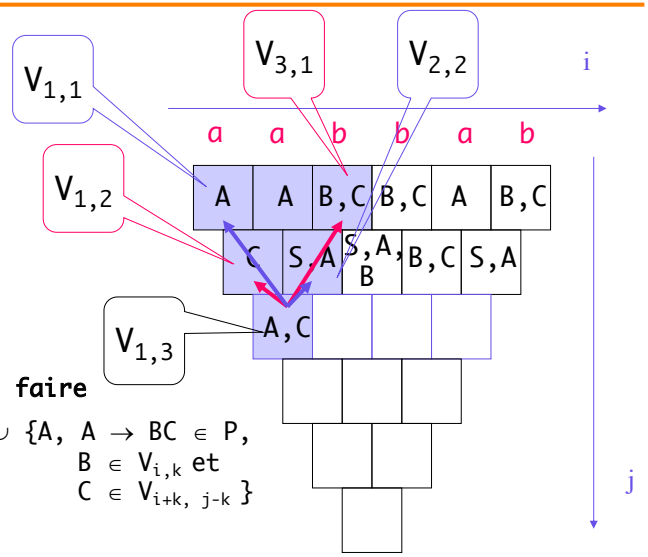
$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

pour $j = 2$
  pour $i = 2, 3, 4, 5$
    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
    pour $k = 1$
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
        $B \in V_{i,k}$ et
        $C \in V_{i+k,\ j-k}\}$



Exemple

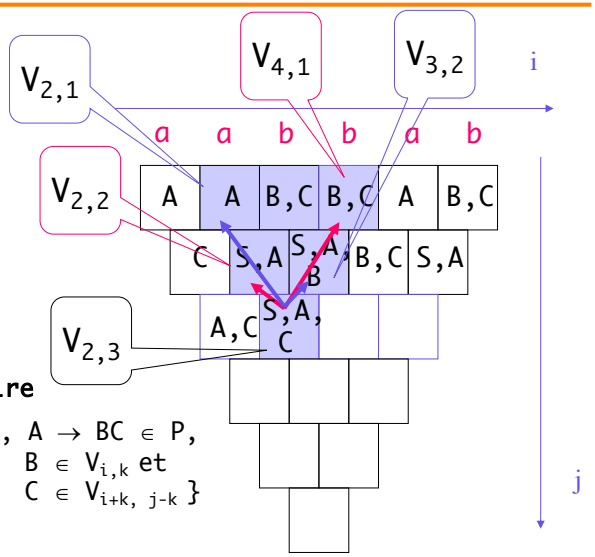
$S \rightarrow AB \mid BB$
$A \rightarrow CC \mid AB \mid a$
$B \rightarrow BB \mid CA \mid b$
$C \rightarrow BA \mid AA \mid b$



pour j = 3
  pour i = 1
    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
    pour k **de** 1 **à** 2 **faire**
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \rightarrow BC \in P,$
      $B \in V_{i,k}$ et
      $C \in V_{i+k,\ j-k}\}$

Exemple

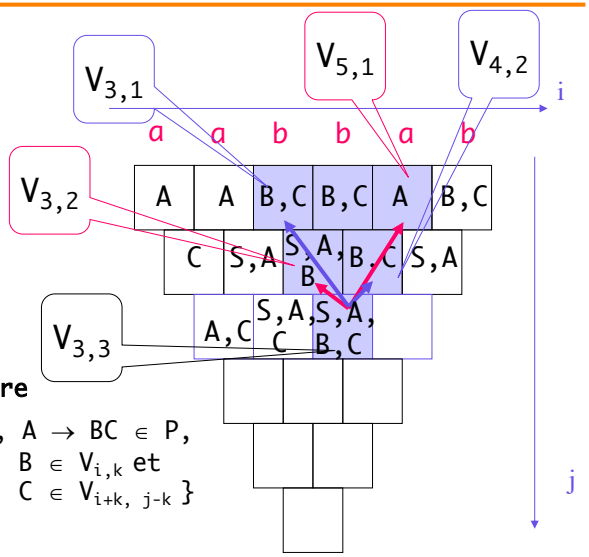
$S \rightarrow AB \mid BB$
$A \rightarrow CC \mid AB \mid a$
$B \rightarrow BB \mid CA \mid b$
$C \rightarrow BA \mid AA \mid b$



pour j = 3
  pour i = 2
    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
    pour k **de** 1 **à** 2 **faire**
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \rightarrow BC \in P,$
      $B \in V_{i,k}$ et
      $C \in V_{i+k,\ j-k}\}$

Exemple

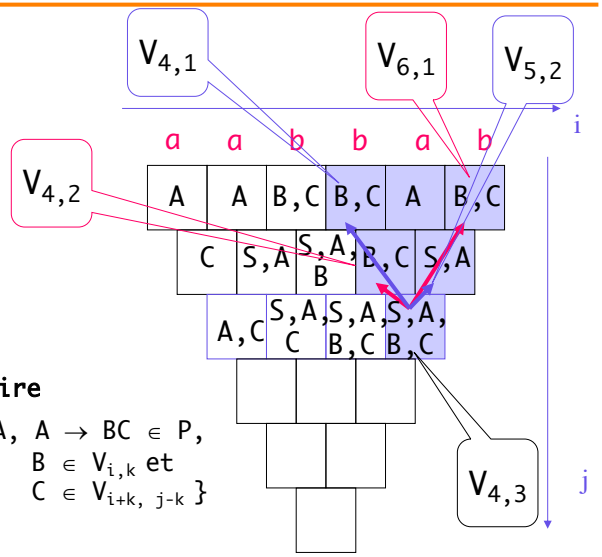
$S \rightarrow AB \mid BB$
$A \rightarrow CC \mid AB \mid a$
$B \rightarrow BB \mid CA \mid b$
$C \rightarrow BA \mid AA \mid b$



pour j = 3
  pour i = 3
    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
    pour k **de** 1 **à** 2 **faire**
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \rightarrow BC \in P,$
      $B \in V_{i,k}$ et
      $C \in V_{i+k,\ j-k}\}$

Exemple

$S \rightarrow AB \mid BB$
$A \rightarrow CC \mid AB \mid a$
$B \rightarrow BB \mid CA \mid b$
$C \rightarrow BA \mid AA \mid b$



pour j = 3
  pour i = 4
    $V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
    pour k **de** 1 **à** 2 **faire**
      $V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \rightarrow BC \in P,$
      $B \in V_{i,k}$ et
      $C \in V_{i+k,\ j-k}\}$

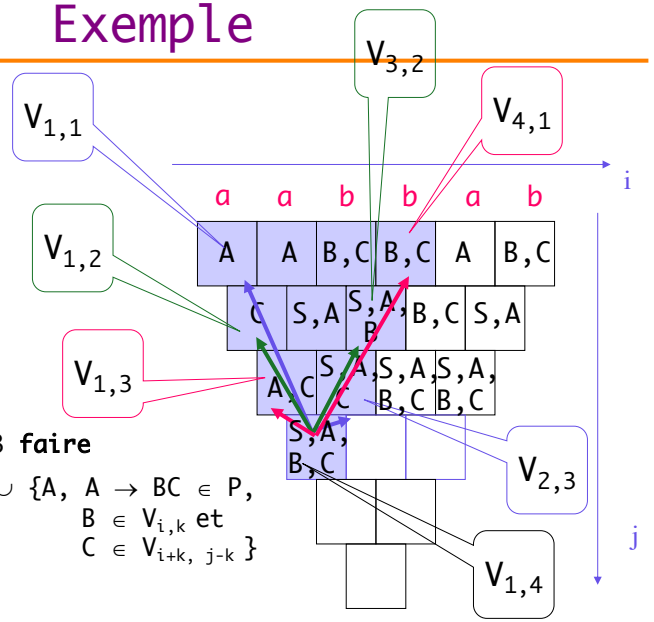
Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

pour j = 4
  pour i = 1

$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 3 **faire**

$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
$B \in V_{i,k}$ et
$C \in V_{i+k,\ j-k}\}$



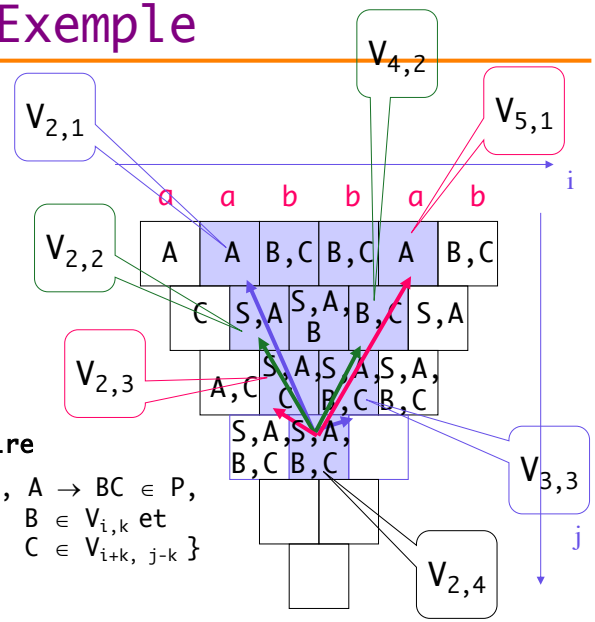
Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

pour j = 4
  pour i = 2

$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 3 **faire**

$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
$B \in V_{i,k}$ et
$C \in V_{i+k,\ j-k}\}$



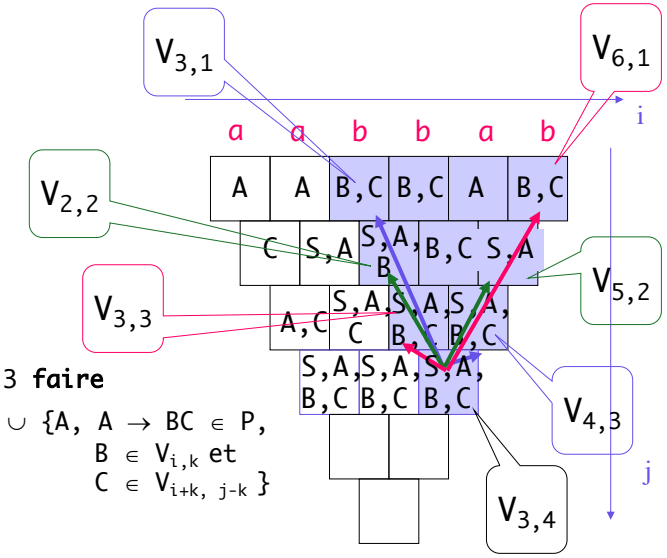
Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

pour j = 4
  pour i = 3

$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 3 **faire**

$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
$B \in V_{i,k}$ et
$C \in V_{i+k,\ j-k}\}$



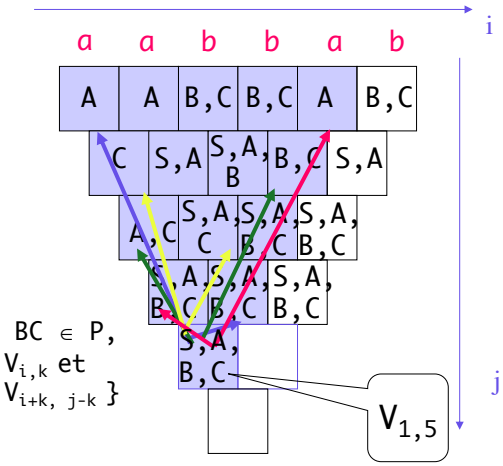
Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

pour j = 5
  pour i = 1

$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 4 **faire**

$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,$
$B \in V_{i,k}$ et
$C \in V_{i+k,\ j-k}\}$



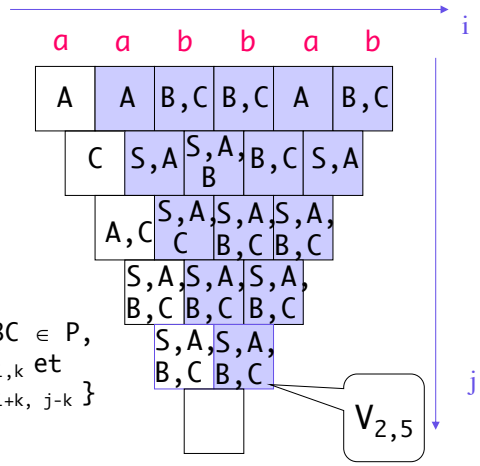
Exemple

$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

pour j = 5
  pour i = 1

$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 4 **faire**

$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,\ B \in V_{i,k} \text{ et } C \in V_{i+k,\ j-k}\}$



Exemple

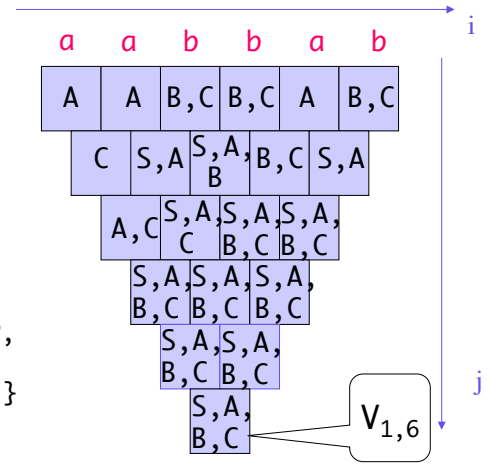
$S \to AB \mid BB$
$A \to CC \mid AB \mid a$
$B \to BB \mid CA \mid b$
$C \to BA \mid AA \mid b$

pour j = 6
  pour i = 1

$V_{i,j} \leftarrow \varnothing$
pour k **de** 1 **à** 5 **faire**

$V_{i,j} \leftarrow V_{i,j} \cup \{A,\ A \to BC \in P,\ B \in V_{i,k} \text{ et } C \in V_{i+k,\ j-k}\}$

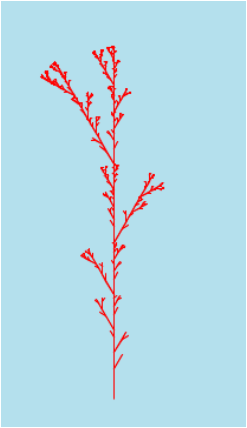
↙ $S \in V_{1,6}$ donc $\mu \in L(G)$



Systèmes de Lindenmayer

- Les systèmes de Lindenmayer* sont des systèmes de réécriture inventés en 1968 par le biologiste A. Lindenmayer
- ils modélisent entre autres la croissance des plantes
- ce sont des grammaires de Type I ou II
- parmi eux, les D0L-systems sont hors-contexte

```
def plante(n,T) :     # un D0L-system
    if n == 0 : forward(T)
    else :
        r = randint(0,5)
        if r<3:
            plante(n-1,2*T/3)
            right(30)
            plante(n-1,T/3)
            back(T/3)
            left(30)
            plante(n-1,T/3)
        else :
            plante(n-1,2*T/3)
            left(30)
            plante(n-1,T/3)
            back(T/3)
            right(30)
            plante(n-1,T/3)
```



* L-systems en anglais