Université Côte d’Azur — L3 Info, L3 MI, L3 ST
Automates & Langages — 2024–25

TD n° 6

Grammaires hors-contexte

Exercice 1) Trouvez le langage correspondant à chacune des grammaires suivantes en indiquant s’il est rationnel ou pas :

$G_1 = (\{S, T, A, B\}, \{0, 1, 2\}, P_1, S)$ $P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0S \mid 0T \\ T \to 1A \mid B2 \\ A \to 2 \mid T2 \\ B \to 1 \mid 1T \end{array} \right\}$	$G_2 = (\{S, T, A, B\}, \{0, 1, 2\}, P_2, S)$ $P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0T \mid 1S \mid 2S \\ T \to 0T \mid 1A \mid 2S \\ A \to 0T \mid 1S \mid 2B \\ B \to 0B \mid 1B \mid 2B \mid \varepsilon \end{array} \right\}$
$G_3 = (\{S\}, \{0, 1, 2\}, P_3, S)$ $P_3 = \left\{ \begin{array}{l} S \to \varepsilon \mid 0 \mid 1 \mid 2 \\ S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 2S2 \end{array} \right\}$	$G_4 = (\{S, T\}, \{0, 1, 2\}, P_4, S)$ $P_4 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0S2 \mid 0T2 \mid 02 \\ T \to 1T2 \mid 12 \end{array} \right\}$

Exercice 2) Considérez les quatre langages suivants parmi lesquels un seul n’est pas hors-contexte :

$L_1 = \{ww^R, w \in \{0, 1\}^*\}$;
$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^*, \mid w \mid_0 = \mid w \mid_1\}$;
$L_3 = \{ww, w \in \{0, 1\}^*\}$;
$L_4 = \overline{L_3} = \{0, 1\}^* \setminus L_3$.

1. Trouvez une grammaire hors-contexte pour chaque langage dès lors qu’il est hors-contexte.
2. Dites si cette grammaire vous paraît ambiguë ou pas. Si elle l’est, vous mettrez en évidence un mot avec deux arbres de dérivation distincts.
3. Que conclure de cet exercice au sujet des propriétés de clôture de la classe des langages hors-contexte ?

Exercices complémentaires

Exercice 3) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S, K, E, C}
T = {'if', 'then', 'else', '*instructions*', '*condition*'}
P = { S → K S }
S → K S E S
S → *instructions*
K → 'if' C 'then'
E → 'else'
C → *condition*

Cette grammaire G est-elle ambiguë ? Si oui, trouvez une chaîne terminale engendrée de deux façons distinctes.

Exercice 4) Considérons les quatre grammaires hors-contexte suivantes :

$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_1, S)$ $P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0A \ \mid\ 1B \ \mid\ \varepsilon \\ A \to S0 \ \mid\ 0 \\ B \to S1 \ \mid\ 1 \end{array} \right\}$	$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_2, S)$ $P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0A \ \mid\ 1S \\ A \to 0A \ \mid\ 1B \ \mid\ 1 \\ B \to 0A \ \mid\ 1S \end{array} \right\}$
$G_3 = (\{S\}, \{0, 1\}, P_3, S)$ $P_3 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0S1S \\ S \to \varepsilon \end{array} \right\}$	$G_4 = (\{S, A\}, \{0, 1\}, P_4, S)$ $P_4 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0S \ \mid\ 1A \\ A \to 0A \ \mid\ 1S \ \mid\ \varepsilon \end{array} \right\}$

Trouvez les langages correspondant aux grammaires précédentes en précisant au passage lesquels sont rationnels.

Exercice 5) On appelle *date* toute expression du type $JJ/MM/AAAA$, comme par exemple :

$$09/10/2023$$

On cherche une grammaire $G = (N, T, P, S)$ afin d'engendrer toutes les dates allant du $01/01/2020$ au $31/12/2023$, sachant que l'année 2020 est bissextile.
L'ensemble des terminaux sera naturellement :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, /\}$$

1. Donnez votre grammaire G, en précisant ses ensembles N et P (veillez à ne pas grossir inconsidérément leurs cardinaux). L'usage des points de suspension est autorisé que pour les jours.
2. A votre avis, le langage $L(G)$ est-il rationnel ? Pourquoi ?