Université Côte d'Azur | L3 Info, L3 MI, L3 ST
Automates & Langages | 2023–24

TD nº 5

Clôture des langages rationnels

Exercice 1) Utilisez le lemme de l'étoile afin de montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1. $L = \{m \in \{0,1\}^*, |m|_0 < |m|_1\}$;
2. $K = \{1^{i^2},\ i > 0\}$.

Exercice 2) En utilisant les propriétés de clôture de la classe des langages rationnels, montrez que les langages suivants ne sont pas rationnels (*on raisonnera sur des langages dont on connaît déjà la rationalité ou la non-rationalité*) :

1. le langage de Dyck sur l'alphabet $\{0,1\}$ (on rappelle que le langage de Dyck est celui des parenthésages bien formés) ;
2. le langage $L = \{w \in \{0,1\}^*, \mid w \mid_0 \neq \mid w \mid_1\}$.

Exercice 3) Voici deux expressions régulières décrivant respectivement les langages L et K :

$$E_L : 1(0+1)^*1 \quad \text{et} \quad E_K : 1^*(01^*01^*)^*$$

1. Décrivez en français chacun des langages considérés.
2. Trouvez les deux automates minimaux $\mathcal{A}_L$ et $\mathcal{A}_K$ qui reconnaissent respectivement les langages L et K.
3. En utilisant le produit d'automates, construisez un automate fini $\mathcal{I}$ pour reconnaître l'intersection $L \cap K$.
4. Adaptez la méthode précédente afin de construire un automate fini $\mathcal{U}$ pour l'union $L \cup K$.

Exercice 4) Considérez les grammaires G_1 et G_2 suivantes :

$$G_1 = (\{A,B\},\{0,1\},P_1,A) \qquad P_1 = \left\{ \begin{array}{l} A \to 0B|1A \\ B \to 0A|1B|\varepsilon \end{array} \right\}$$

$$G_2 = (\{C,D\},\{0,1\},P_2,C) \qquad P_2 = \left\{ \begin{array}{l} C \to 0C|1C|0D \\ D \to \varepsilon \end{array} \right\}$$

1. Quels sont les langages respectivement engendrés par G_1 et par G_2 ?
2. Déduisez de G_1 et G_2 une grammaire pour engendrer le langage $L(G_1) \cup L(G_2)$.
3. Trouvez deux grammaires pour engendrer les langages $\overline{L(G_1)}$ et $\overline{L(G_2)}$ en passant éventuellement par la construction des automates.
4. Trouvez une grammaire pour engendrer le langage $L(G_1) \cap L(G_2)$.

Exercices complémentaires

Exercice 5) Utilisez le lemme de l'étoile afin de montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

$$L = \{m = m^R, m \in \{0,1\}^*\}$$

$$P = \{1^p, p \text{ nombre premier}\}$$

Exercice 6) Considérez les grammaires G_1 et G_2 suivantes :

$$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0,1\}, P_1, S) \qquad P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 1A \\ A \to 0A|1B \\ B \to 0A|1B|\varepsilon \end{array} \right\}$$

$$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0,1\}, P_2, S) \qquad P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 0A|1S \\ A \to 0B|1S \\ B \to 0B|1B|\varepsilon \end{array} \right\}$$

1. Quels sont les langages respectivement engendrés par G_1 et par G_2 ?
2. Ecrivez une grammaire pour engendrer le langage $L(G_1) \cup L(G_2)$.
3. Peut-on en déduire facilement une grammaire pour engendrer le langage $L(G_1) \cap L(G_2)$?
   Trouvez une grammaire pour cette intersection.

Exercice 7) On note *bin*(k) la représentation binaire de l'entier k et on s'intéresse au langage :

$$L = \{\mathit{bin}(k)\,\mathit{bin}(k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$$

$$L = \{01, 110, 1011, 11100, 100101, 101110, 110111, 1111000, ...\}$$

1. Démontrez à l'aide du lemme de l'étoile que le langage L n'est pas rationnel.
2. Recommencez en utilisant cette fois les propriétés de clôture de la classe des langages rationnels *(on pourra utiliser la non-rationalité des langages vus en cours ou en TD).*