Université Côte d'Azur | L3 Info, L3 MI, L3 ST
Automates & Langages | 2024–25

TD n° 4

Grammaires régulières

Exercice 1) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G

Axiome = A
N = {A, B, C }
T = {0, 1}
P = { A → 0 A | 1 | 1 B
B → 0 C | 1 A
C → 0 | 0 B | 1 C }

1. Transformez cette grammaire qui est régulière à droite en un automate fini $\mathcal{A}$.
2. Sauriez-vous décrire en français les mots du langage $L(G)$? *(Indication : il s'agit de représentations binaires)* .

Exercice 2) On se place sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et on considère le langage L décrit par l'expression régulière suivante :

$$L : \ (1 + 00 + 000)^*$$

1. Construisez les états de l'automate minimal $\mathcal{M}$ reconnaissant le langage L, en utilisant la méthode des résiduels puis dessinez l'automate $\mathcal{M}$ obtenu.
2. Décrivez en français ce qui caractérise les mots du langage L.
3. Trouvez à partir de l'automate minimal $\mathcal{M}$ une grammaire régulière pour engendrer le langage L.

Exercice 3) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G

Axiome = S
N = {S, A, B, C, D}
T = {0, 1}
P = { S → 0 B | 1 A | 0 C | 1 D | 0 | 1 | ε
A → 0 B | 1 A | 0 | ε
B → 1 A
C → 0 C | 1 D | 1
D → 0 D | 1 C | 0 }

1. Transformez la grammaire G en un automate fini $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = L(G)$ et dessinez $\mathcal{A}$.
2. Indiquez *en français* quel est le langage $L(G)$.
3. Donnez *de visu* une expression régulière décrivant le langage $L(G)$.
4. Indiquez *en français* quel est le langage $\overline{L(G)}$ complémentaire de $L(G)$.

Exercice 4) Considérons les quatre grammaires suivantes :

$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_1, S)$	$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_2, S)$
$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to \varepsilon \,\vert\, 0A \,\vert\, B1 \\ A \to 1 \,\vert\, S1 \\ B \to 0 \,\vert\, 0S \end{array} \right\}$	$P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to 1S \,\vert\, 0A \\ A \to 1S \,\vert\, 0B \,\vert\, 0 \\ B \to 0 \,\vert\, 1 \,\vert\, 0B \,\vert\, 1B \end{array} \right\}$
$G_3 = (\{S\}, \{0, 1\}, P_3, S)$	$G_4 = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, P_4, S)$
$P_3 = \left\{ \; S \to \varepsilon \,\vert\, 0 \,\vert\, 01S \,\vert\, 1S \; \right\}$	$P_4 = \left\{ \begin{array}{l} S \to AB \\ A \to \varepsilon \,\vert\, 0 \\ B \to 10B \,\vert\, C \\ C \to \varepsilon \,\vert\, 1 \end{array} \right\}$

1. Pour chacune de ces grammaires, dites si elle est régulière ou pas.
2. Trouvez les langages engendrés par chacune de ces grammaires.
3. Parmi ces langages, lesquels sont rationnels ?
4. Trouvez une grammaire régulière pour chaque langage dès lors qu'il est rationnel.

Exercices complémentaires

Exercice 5) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G
Axiome = S
N = {S, X }
T = {0, 1}
P = { $S \to 0\,X$
$X \to S\,1$
$S \to \varepsilon$ }

1. La grammaire G est-elle régulière ? Pourquoi ?
2. Quel est le langage $L(G)$ engendré par cette grammaire ? Vous semble-t-il rationnel ?

Exercice 6) On se place sur l'alphabet binaire $\{0, 1, 2\}$. Le langage L regroupe les mots ayant 2 comme antépénultième (*i.e.* avant avant-dernière) lettre.

1. Trouvez l'automate minimal $\mathcal{A}$ reconnaissant le langage L^R.
2. Déduire de l'automate $\mathcal{A}$ une grammaire régulière à droite G qui engendre L^R.
3. En déduire une grammaire régulière à gauche G qui engendre L. *On pourra raisonner sur les arbres de dérivation.*
4. En déduire un algorithme pour passer d'une grammaire régulière à gauche à une grammaire régulière à droite et *vice versa*.