

TD n° 4

Grammaires régulières

Exercice 1) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G
Axiome = A
N = {A, B, C }
T = {0, 1}
P = { A → 0 A 1 1 B B → 0 C 1 A C → 0 0 B 1 C }

1. Transformez cette grammaire qui est régulière à droite en un automate fini \mathcal{A} .
2. Sauriez-vous décrire en français les mots du langage $L(G)$? (*Indication : il s'agit de représentations binaires*) .

Exercice 2) On se place sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et on considère le langage L décrit par l'expression régulière suivante :

$$L : (1 + 00 + 000)^*$$

1. Construisez les états de l'automate minimal \mathcal{M} reconnaissant le langage L , en utilisant la méthode des résiduels puis dessinez l'automate \mathcal{M} obtenu.
2. Décrivez en français ce qui caractérise les mots du langage L .
3. Trouvez à partir de l'automate minimal \mathcal{M} une grammaire régulière pour engendrer le langage L .

Exercice 3) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G
Axiome = S
N = {S, A, B, C, D}
T = {0, 1}
P = { S → 0 B 1 A 0 C 1 D 0 ε A → 0 B 1 A 0 ε B → 1 A C → 0 C 1 D D → 0 D 1 C ε }

1. Transformez la grammaire G en un automate fini \mathcal{A} tel que $L(\mathcal{A}) = L(G)$ et dessinez \mathcal{A} .
2. Indiquez *en français* quel est le langage $L(G)$.
3. Donnez *de visu* une expression régulière décrivant le langage $L(G)$.
4. Indiquez *en français* quel est le langage $\overline{L(G)}$ complémentaire de $L(G)$.

Exercice 4) Considérons les quatre grammaires suivantes :

$G_1 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_1, S)$ $P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \varepsilon \mid 0A \mid B1 \\ A \rightarrow 1 \mid S1 \\ B \rightarrow 0 \mid 0S \end{array} \right\}$	$G_2 = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P_2, S)$ $P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 1S \mid 0A \\ A \rightarrow 1S \mid 0B \mid 0 \\ B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0B \mid 1B \end{array} \right\}$
$G_3 = (\{S\}, \{0, 1\}, P_3, S)$ $P_3 = \{ S \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 01S \mid 1S \}$	$G_4 = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1\}, P_4, S)$ $P_4 = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \\ A \rightarrow \varepsilon \mid 0 \\ B \rightarrow 10B \mid C \\ C \rightarrow \varepsilon \mid 1 \end{array} \right\}$

1. Pour chacune de ces grammaires, dites si elle est régulière ou pas.
2. Trouvez les langages engendrés par chacune de ces grammaires.
3. Parmi ces langages, lesquels sont rationnels?
4. Trouvez une grammaire régulière pour chaque langage dès lors qu'il est rationnel.

Exercices complémentaires

Exercice 5) Considérons la grammaire G suivante :

Grammaire G
Axiome = S
$N = \{S, X\}$
$T = \{0, 1\}$
$P = \{ S \rightarrow 0X$
$X \rightarrow S1$
$S \rightarrow \varepsilon \quad \}$

1. La grammaire G est-elle régulière? Pourquoi?
2. Quel est le langage $L(G)$ engendré par cette grammaire? Vous semble-t-il rationnel?

Exercice 6) On se place sur l'alphabet binaire $\{0, 1, 2\}$. Le langage L regroupe les mots ayant 2 comme antépénultième (*i.e.* avant avant-dernière) lettre.

1. Trouvez l'automate minimal \mathcal{A} reconnaissant le langage L^R .
2. Dédurre de l'automate \mathcal{A} une grammaire régulière à droite G qui engendre L^R .
3. En déduire une grammaire régulière à gauche G qui engendre L . On pourra raisonner sur les arbres de dérivation.
4. En déduire un algorithme pour passer d'une grammaire régulière à gauche à une grammaire régulière à droite et *vice versa*.