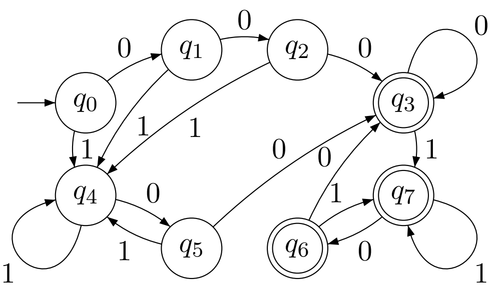
Université Côte d'Azur | L3 Info, L3 MI, L3 ST
Automates & Langages | 2023–24

TD n° 3

Automate minimal

Exercice 1)



1. Construisez l'automate minimal $\mathcal{M}$ obtenu en minimisant l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessus.
2. Donnez *de visu* une expression régulière pour le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.

Exercice 2) Soit L le langage des mots de longueur au moins 2 sur l'alphabet $\{0, 1\}$ dont l'avant-dernière lettre est un 0 :

$$L = \{00, 01, 000, 001, 100, 101, \ldots\}$$

1. Donnez une expression régulière E qui décrit le langage L.
2. Donnez un automate <u>non-déterministe</u> $\mathcal{A}$ qui reconnaît le langage L.
3. Appliquez l'algorithme de déterminisation à $\mathcal{A}$ afin d'obtenir l'automate déterministe $\mathcal{D}$ puis dessinez $\mathcal{D}$ sous l'autre automate.
4. Appliquez l'algorithme de minimisation à $\mathcal{D}$ afin de trouver l'automate minimal $\mathcal{M}$ reconnaissant L.
5. Retrouvez ce même automate minimal $\mathcal{M}$ par la méthode des résiduels.

Exercice 3) On considère le langage L sur l'alphabet $\{0, 1\}$ décrit par l'expression régulière suivante :

$$(0 + 1)^*0 + 1(01)^*$$

1. Le langage L est clairement l'union de deux langages : décrivez en français ces deux langages.
2. En utilisant la méthode des résiduels à gauche, calculez les états de l'automate fini minimal $\mathcal{M}$ reconnaissant le langage L (il a 5 états) puis dessinez-le.

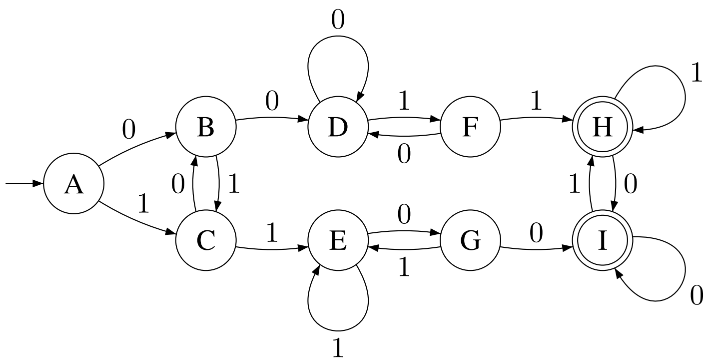
Exercice 4) Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Dites si les langages suivants vous paraissent rationnels et argumentez brièvement. *Vous pourrez pour cela utiliser voire généraliser la notion de langage associé à un état*.

1. $L_1 = \{u \in \Sigma^*, \exists v, w \in \Sigma^* \;\; vuw \in L\}$
2. $L_2 = \{u^R, u \in L\}$
3. $L_3 = \sqrt{L} = \{u \in \Sigma^*, uu \in L\}$

Exercices complémentaires

Exercice 5)

1. Construisez puis dessinez l'automate minimal $\mathcal{M}$ obtenu en minimisant l'automate $\mathcal{A}$ de la figure suivante.
2. Essayez de trouver *de visu* une expression régulière pour le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$.



Exercice 6) On se place sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et on considère le langage L décrit par l'expression régulière suivante :

$$E : (0 + 1\,0)^*(1 + \varepsilon)$$

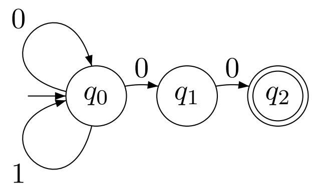
1. Construisez les états de l'automate minimal $\mathcal{M}$ reconnaissant le langage L par la méthode des résiduels *(l'automate a 3 états)*.
2. Décrivez en français ce qui caractérise les mots de L.

Exercice 7) On se place sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Indiquez pour chacun des langages suivants le nombre minimum d'états que devra comporter un automate fini minimal les reconnaissant :

1. le langage vide ;
2. le langage des représentations binaires des entiers congrus à n modulo m, n et m fixés ;
3. un langage fini dont le mot le plus long est de longueur k ;
4. le langage des mots contenant le motif m, $m \in \{0, 1\}^*$;

5. le langage $\{0^n, n \text{ entier naturel fixé}\}$;
6. le langage $\{0^n, n \in \mathbb{N}\}$;
7. le langage $\{0^n 1^n, n \text{ entier naturel fixé}\}$.

Exercice 8) Le cours présente deux méthodes classiques pour trouver l'automate minimal reconnaissant un langage rationnel donné. Sachez qu'il en existe une autre des plus surprenantes due à J. A. Brzozowski. Elle n'utilise que des transpositions et des déterminisations d'automates.



Soit à minimiser l'automate fini $\mathcal{A}$ ci-dessus qui reconnaît les mots binaires terminant par le motif 00.

1. Donnez l'automate $\mathcal{A}_R$ reconnaissant le langage renversé de $L(\mathcal{A})$.
2. Donnez l'automate $\mathcal{B}$ obtenu par déterminisation de l'automate $\mathcal{A}_R$.
3. Donnez l'automate $\mathcal{B}_R$ reconnaissant le langage renversé de $\mathcal{B}$.
4. Donnez l'automate $\mathcal{C}$ obtenu par déterminisation de l'automate $\mathcal{B}_R$.
5. Comparez l'automate $\mathcal{C}$ à l'automate $\mathcal{M}$ que l'on aurait obtenu par déterminisation puis minimisation de l'automate de départ.