

# Introduction à la programmation linéaire

Master Informatique

---

Arnaud Malapert

2018 – 2019

Université Côte d'Azur, CNRS, I3S, France

# Table of contents

1. Programmation mathématique
2. Programmation linéaire
  - Modélisation
  - Résolution graphique
  - Analyse de sensibilité
3. Solveurs d'équations linéaires
  - Résolution par élimination de Gauss-Jordan
  - Opérations sur les systèmes linéaires
  - Optimisation par l'algorithme du simplexe
  - Méthodes de points intérieurs
4. Dualité et sensibilité
  - Dualité
  - Analyse de sensibilité
5. Programmation linéaire en nombres entiers

# Programmation mathématique

---

D'une manière générale, un programme mathématique est un problème d'optimisation sous contraintes dans  $\mathbb{R}^n$  de la forme :

Minimiser  $f(x)$

Sous les contraintes :

$$g_i(x) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \in S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

# Exemple de programme mathématique

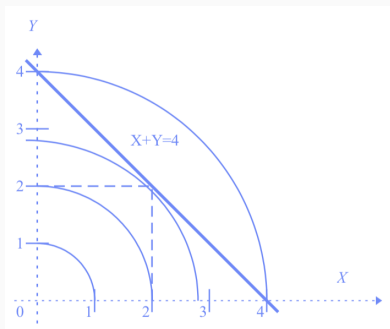
Trouver le point le plus proche de l'origine dans un demi plan.

$$\min x^2 + y^2$$

$$x + y \geq 4$$

## Solutions réalisables

- ▶  $x = 0, y = 4, f(x, y) = 16$
- ▶  $x = 3, y = 3, f(x, y) = 18$
- ▶  $x = 2, y = 2, f(x, y) = 8.$



## Surprise !

Certains problèmes n'ont pas de solution.

### Aucune solution réalisable

$$\min x^2$$

$$x \geq 2 \wedge x \leq 0$$

### Optimum non borné

On peut **toujours** améliorer l'objectif :

$$\max x$$

$$x \geq 0$$

# Programmation linéaire

---

# Programmation linéaire

---

## Modélisation



- ▶ Développée au cours de la Seconde Guerre mondiale.
  - ▶ L'objectif était d'allouer plus intelligemment les ressources de l'armée.
  - ▶ Le terme « programmation » est employé avec le sens de « plan ».
- ▶ La PL peut résoudre un VASTE nombre de problèmes.
  - ▶ Transport : aériens, routiers et ferroviaires.
  - ▶ Énergie : pétrole, gaz, électricité, nucléaire.
  - ▶ Télécommunications, industrie forestière, finance . . .
- ▶ Le développement de la théorie et des algorithmes est une des avancées scientifiques importantes du 20e siècle.
  - ▶ avec l'accélération des ordinateurs, la vitesse de résolution est améliorée par un facteur de 1 million tous les 10 ans . . .

$$\min c \cdot x$$

$$Ax + b \geq 0$$

- ▶  $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$  est le vecteur des inconnues de dimension  $n$ .
- ▶  $A$  est la matrice réelle des contraintes de dimension  $m \times n$ .
- ▶  $b$  est le terme constant de dimension  $m$ .
- ▶  $c$  de dimension  $n$  est le gradient de la fonction objectif.
- ▶ Un programme linéaire peut s'écrire sous de multiples formes équivalentes.

## **Variables de décision**

Des variables mathématiques représentant des décisions

## **Fonction objectif**

Une équation linéaire qui quantifie un objectif.

- ▶ Les entreprises veulent fréquemment *maximiser les profits*.
- ▶ Un département de service préférera *minimiser le coût des opérations*.

## **Contraintes**

Des équations linéaires qui restreignent les valeurs possibles des variables de décisions.

## Formulation d'un Modèle PL

$$\min / \max z = c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_1$$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_i$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \quad \{\leq, =, \geq\} \quad b_m$$

$x_j$  variables de décision.

$b_i$  second membre.

$c_j$  coefficient de la fonction objectif.

$a_{ij}$  coefficients des contraintes.

## Premier exemple de modélisation

- ▶ Un fabricant de . . . assemble deux produits A et B.
- ▶ Les ressources sont limités.
  - ▶ 1000 unités du composant de fabrication.
  - ▶ 40 heures de production par semaine.

La fabrication d'un produit consomme des ressources.

- ▶ Le produit A requiert 2 unités du composant et 3 minutes de temps.
  - ▶ Le produit B requiert 1 unités du composant et 4 minutes de temps.
- ▶ Il faut stocker les produits fabriqués durant la semaine.
  - ▶ L'entrepôt a une capacité de 700 produits.
  - ▶ Le nombre de produits A ne doit pas excéder le nombre de produits B de plus de 350 unités.
- ▶ Le profit est :
  - ▶ 8 € pour une unité du produit A.
  - ▶ 5 € pour une unité du produit B.
- ▶ *Maximiser le profit hebdomadaire.*

## Exercice : une heuristique planification

## Heuristique

1. Produire le plus possible de A.
2. Utiliser les ressources disponibles pour produire B
3. en veillant à respecter *toutes les contraintes*.

# Exercice : une heuristique planification

## Heuristique

1. Produire le plus possible de A.
2. Utiliser les ressources disponibles pour produire B
3. en veillant à respecter *toutes les contraintes*.

## Solution

- ▶ On va donc produire 450 unités du produit A et
- ▶ 100 unités du produit B
- ▶ pour un profit hebdomadaire de 4100 €.



## Variables de décision

$x_1$  production hebdomadaire du produit A.

$x_2$  production hebdomadaire du produit B.

$$\max z = 8x_1 + 5x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 1000 \quad (\text{composant disponible})$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 40 \times 60 \quad (\text{temps disponible})$$

$$x_1 + x_2 \leq 700 \quad (\text{stockage})$$

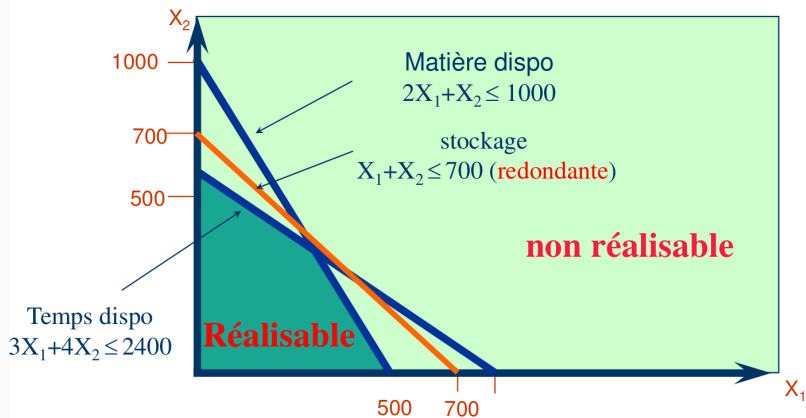
$$x_1 - x_2 \leq 350 \quad (\text{mélange})$$

# Programmation linéaire

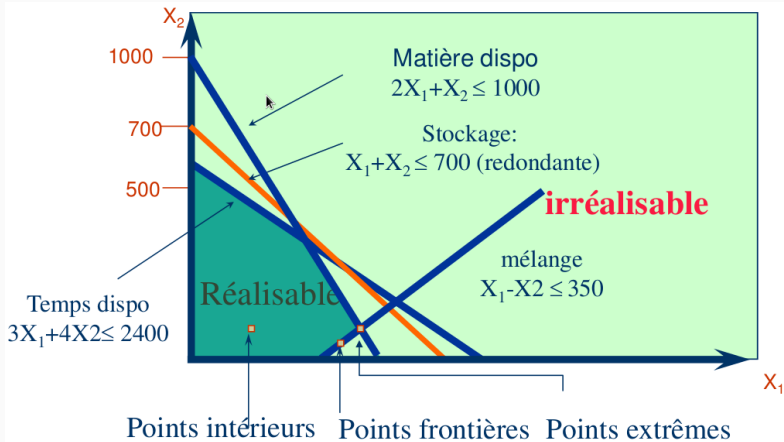
---

Résolution graphique

# Résolution graphique

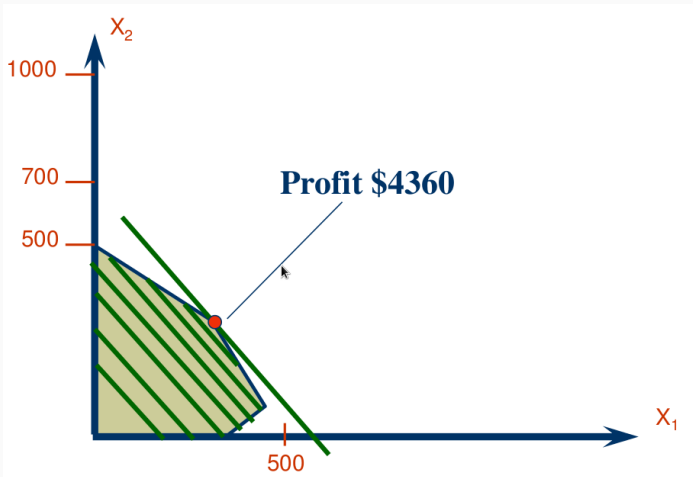


# Résolution graphique



# Trouver une solution optimale

1. Débuter avec un profit arbitraire, disons 2000 €...
2. Ensuite, on améliore le profit tant que c'est possible ...



**Produit A** 320 unités

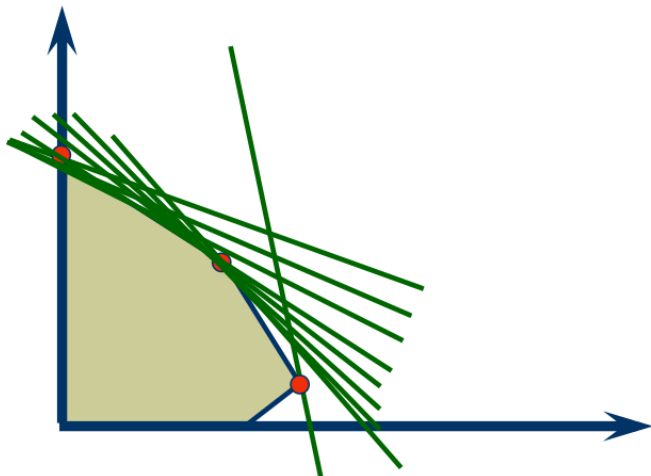
**Produit B** 360 unités

**Profit** 4360 €

- ▶ Cette solution utilise tout le matériel et le temps disponible.
- ▶ La production est de 680 (non 700).
- ▶ Il y a 40 unités supplémentaires du produit B.

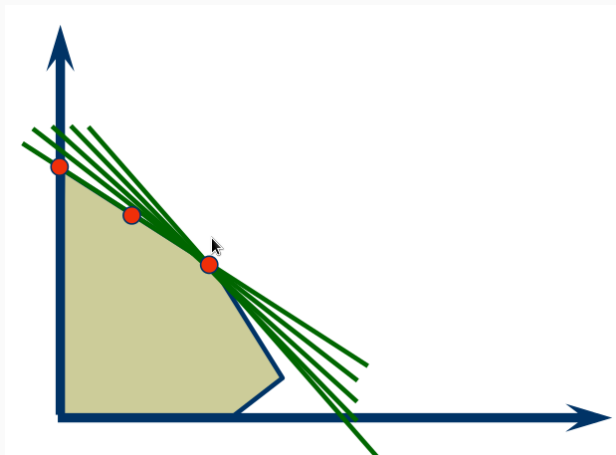
## Le rôle des points extrêmes . . .

- ▶ Si un programme linéaire a une solution optimale,
- ▶ alors au moins un point extrême est optimal.



## Dégénérescence : plusieurs solution optimales

- ▶ Si plusieurs solutions optimales existent, alors la fonction objectif est parallèle à au moins une des contraintes.
- ▶ Toute combinaison convexe de solutions optimales est aussi optimale.





# Le problème du régime de Polly

## Nourriture disponible

	Portion	Énergie (kcal)	Protéines (g)	Calcium (mg)	Prix/portion
Céréales	28g	110	4	2	3
Poulet	100g	205	32	12	24
Œufs	2 (gros)	160	13	54	13
Lait entier	237cc	160	8	285	9
Tarte	170g	420	4	22	20
Porc et haricots	260g	260	14	80	19

## Besoins journaliers

**Énergie** 2000 kcal

**Protéines** 55g

**Calcium** 800mg

## Contraintes

**Céréales** au plus 2 portions/jour.

**Poulet** au plus 3 portions/jour.

**Œufs** au plus 2 portions/jour.

**Lait Entier** au plus 8 portions/jour.

**Tarte** au plus 2 portions/jour.

**Porcs et haricots** au plus 2 portions/jour.

1. Comment formaliser le problème ?
2. Polly peut-elle trouver une solution ?
3. Qu'est-ce qui fait la spécificité du problème ?

4. Comment résoudre ce problème et les problèmes similaires ?

## Modélisation du régime de Polly

- ▶ *Variables entières* représentant le nombre de portions de chaque aliment :
- ▶  $x_c$  (céréales),  $x_p$  (poulet),  $x_o$  (œufs),
- ▶  $x_l$  (lait entier),  $x_t$  (tarte),  $x_h$  (porcs et haricots).

$$\min z = 3x_c + 24x_p + 13x_o + 9x_l + 20x_t + 19x_h$$

$$110x_c + 205x_p + 160x_o + 160x_l + 420x_t + 260x_h \geq 2000 \quad (\text{énergie})$$

$$4x_c + 32x_p + 13x_o + 8x_l + 4x_t + 14x_h \geq 55 \quad (\text{protéines})$$

$$2x_c + 12x_p + 54x_o + 285x_l + 22x_t + 80x_h \geq 800 \quad (\text{calcium})$$

$$x_c \leq 2, x_p \leq 3, x_o \leq 2, x_l \leq 8, x_t \leq 2, x_h \leq 2$$

$$x_c \geq 0, x_p \geq 0, x_o \geq 0, x_l \geq 0, x_t \geq 0, x_h \geq 0$$

# Existence de solutions optimales ?

## Chvatal17a

$$\min 3 + x_1 + x_2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## Chvatal17c

$$\min x_1 - x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq -2$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq -2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## Chvatal17b

$$\min 3x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-2x_1 - 2x_2 \leq -10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## extra

$$\min x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

# Programmation linéaire

---

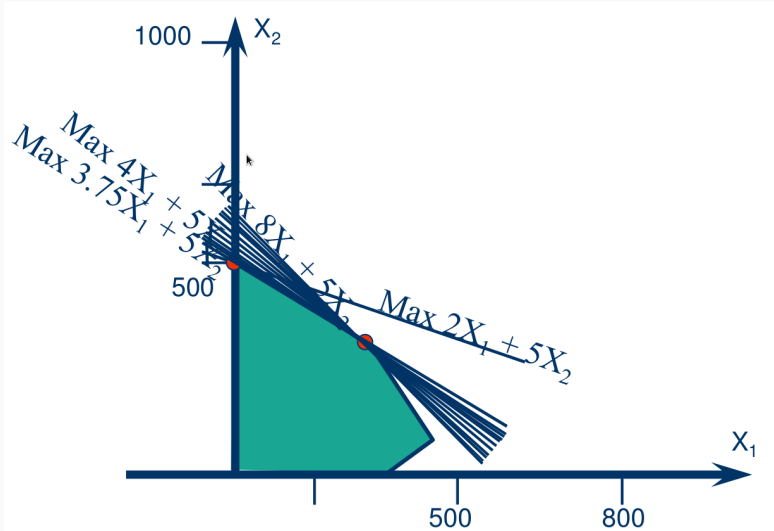
## Analyse de sensibilité

- ▶ Est-ce que la solution optimale est sensible aux paramètres du problème ?
- ▶ Pourquoi se poser cette question ?
  - ▶ Les paramètres utilisés ne sont que des estimations.
  - ▶ Dans un environnement dynamique, ceux-ci peuvent changer régulièrement.
  - ▶ Une analyse de scénarios (what-if) peut permettre de proposer des changements aux paramètres.

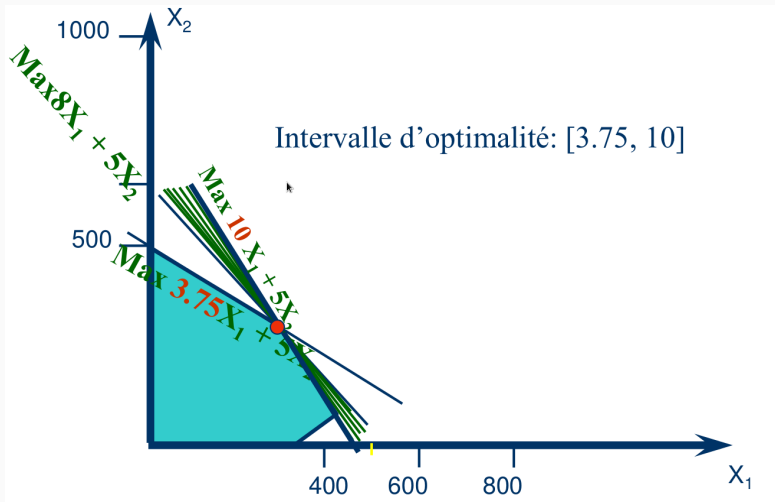
## Objectif : intervalle d'optimalité

- ▶ La *solution* optimale demeurera inchangée tant que :
  - ▶ un coefficient de la fonction objectif demeure dans son intervalle d'optimalité ;
  - ▶ rien d'autre ne change.
- ▶ La *valeur* de cette solution changera si :
  - ▶ le coefficient qui a changé multiplie une variable dont la valeur optimale est non nulle.

# Objectif



# Objectif





## Coûts réduits

En assumant que rien d'autre ne change dans les paramètres, le coût réduit d'une variable qui vaut 0 dans la solution optimale est :

- ▶ L'inverse de l'augmentation du coefficient de l'objectif de la variable  $x_j(-\Delta C_j)$  nécessaire pour que la variable devienne positive dans la solution optimale.
- ▶ OU, c'est le changement à la valeur de l'objectif pour chaque unité d'augmentation de  $x_j$  (nulle).

## Écart complémentaires

Pour une solution optimale,

- ▶ soit la variable à une valeur de 0,
- ▶ soit c'est son coût réduit qui vaut 0.

## Second membre

En assumant que rien d'autre ne change dans les paramètres, tout changement au second membre d'une contrainte

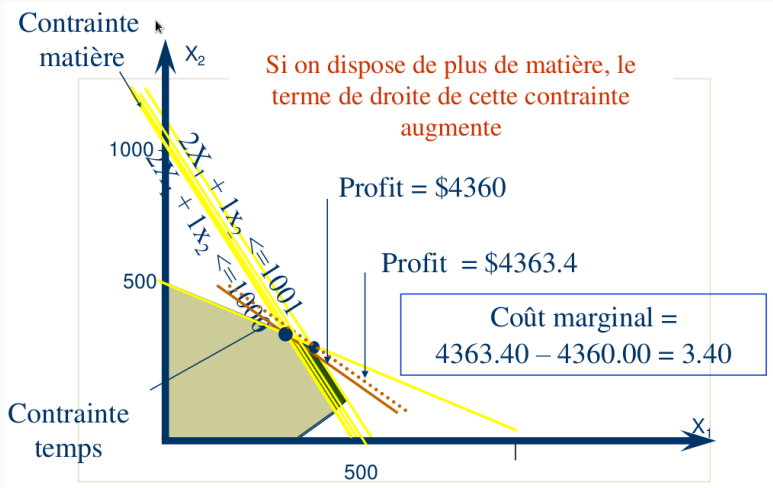
**active** (qui touche la solution optimale) entraînera une modification de la solution optimale.

**inactive** n'entraînera pas de modification à la solution optimale si elle est plus petite que l'écart entre la solution et cette contrainte.

### Coût marginal

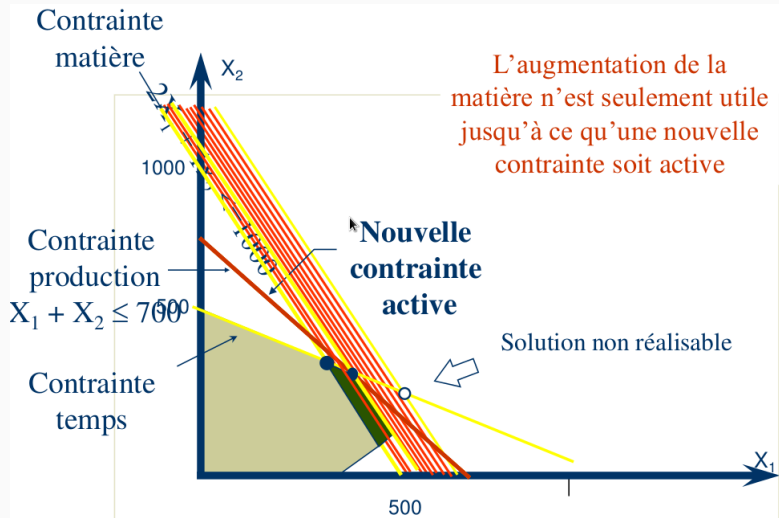
- ▶ le coût marginal est l'amélioration de la valeur de l'objectif pour
- ▶ chaque augmentation d'une unité du second membre d'une contrainte.

# Coût marginal

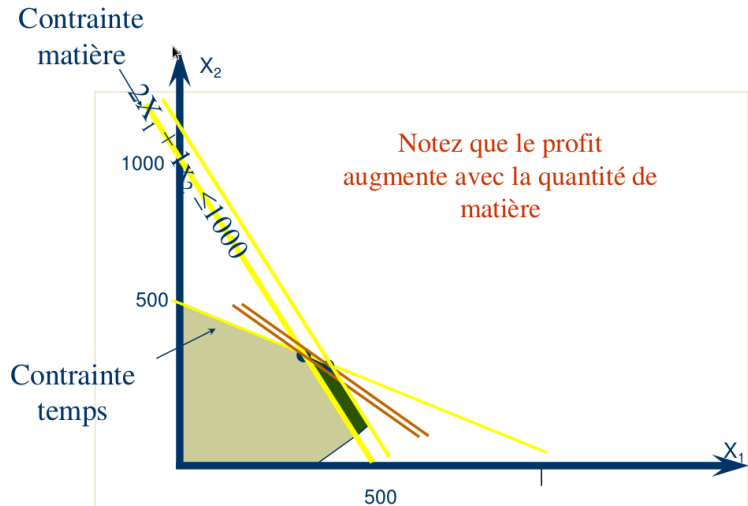


- ▶ Modifier une contrainte.
- ▶ Ajouter une contrainte.
- ▶ Retirer une contrainte.
- ▶ Ajouter une variable.
- ▶ Effacer une variable.

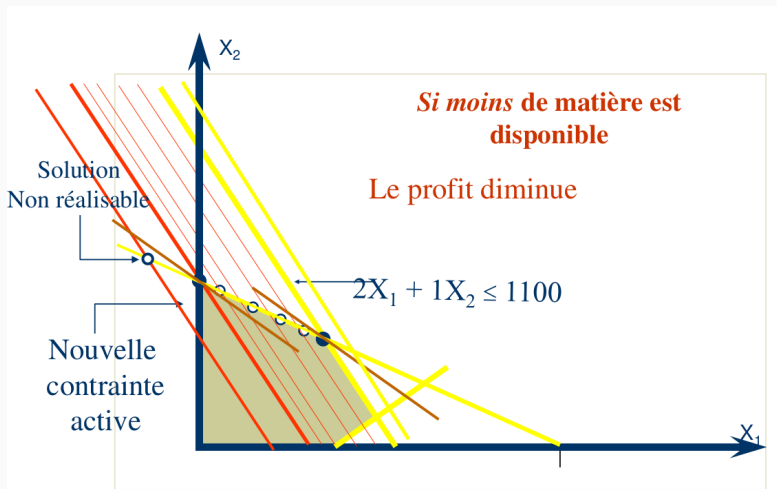
# Intervalle de réalisabilité



# Intervalle de réalisabilité



# Intervalle de réalisabilité



- ▶ un outil de modélisation et de résolution très puissant.
- ▶ Dans certaines situations, on peut rencontrer certaines difficultés :
  - ▶ pas de solutions réalisables ;
  - ▶ solutions optimales multiples ;
  - ▶ phénomène de dégénérescence et cyclage ;
  - ▶ solutions non bornées.



## Exercice : résolution graphique

$$\min z = 16x + 25y$$

$$x + 7y \geq 4$$

$$x + 5y \geq 5$$

$$2x + 3y \geq 9$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

1. Résolution graphique.
2. Analyse de sensibilité :
  - ▶ coefficients de l'objectif ;
  - ▶ second membre.

# Exercice : résolution graphique

$$\min z = 16x + 25y$$

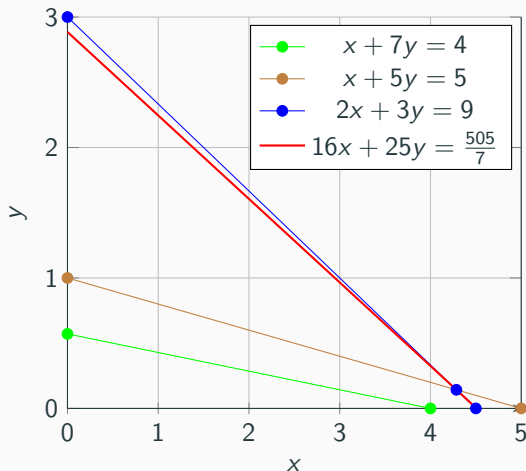
$$x + 7y \geq 4$$

$$x + 5y \geq 5$$

$$2x + 3y \geq 9$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

1. Résolution graphique.
2. Analyse de sensibilité :
  - ▶ coefficients de l'objectif ;
  - ▶ second membre.



# Solveurs d'équations linéaires

---

# **Solveurs d'équations linéaires**

---

**Résolution par élimination de  
Gauss-Jordan**

# Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan

- ▶ Choisir une équation  $c \in C$  ;
- ▶ Réécrire  $c$  sous la forme  $x = e$  ;
- ▶ Remplacer  $x$  par  $e$  dans toutes les autres équations de  $C$ .
- ▶ Continuer jusqu'à ce que :
  1. Toutes les équations de  $C$  sont sous la forme  $x = e$ .
  2. ou une équation devient impossible  $d = 0$ .
- ▶ Renvoyer `vrai` dans le premier cas et `faux` sinon.

## Exemple 1

$$1 + x = 2y + z$$

$$z - x = 3$$

$$x + y = 5 + z$$

- Remplacer  $x$  par  $2y + z - 1$

$$x = 2y + z - 1$$

$$z - 2y - z + 1 = 3$$

$$2y + z - 1 + y = 5 + z$$

- Simplification et découverte d'une contradiction.

$$x = 2y + z - 1$$

$$y = -1$$

$$y = 2$$

## Exemple 2

$$\begin{aligned}1 + x &= 2y + z \\ z - x &= 3\end{aligned}$$

- Remplacer  $x$  par  $2y + z - 1$

$$\begin{aligned}x &= 2y + z - 1 \\ z - 2y - z + 1 &= 3\end{aligned}$$

- Forme résolue : on peut construire au moins une solution réalisable.

$$\begin{aligned}x &= z - 3 \\ y &= -1\end{aligned}$$

## Exercice : méthode de Gauss

Résoudre dans  $\mathbb{R}^4$  par la méthode de Gauss le système :

$$x + 2y + 3z - 2t = 6$$

$$2x - y - 2z - 3t = 8$$

$$3x + 2y - z + 2t = 4$$

$$2x - 3y + 2z + t = -8$$



## Exercice : système linéaire paramétré

Pour quelles valeurs de  $k$ , le système linéaire

$$kx + y = 1$$

$$x + ky = 1$$

admet-il

- ▶ aucune solution ?
- ▶ une solution unique ?
- ▶ une infinité de solutions ?

# Forme standard d'un système linéaire

- ▶ Contraintes d'égalités uniquement.
- ▶ Variables positives ou nulles uniquement

On peut toujours se ramener à un système linéaire sous forme standard par l'introduction de variables d'écart.

# Forme canonique d'un système linéaire

**Variable de base** à la gauche d'une seule équation.

**Variable hors base** à la droite de n'importe quelle équation.

## Déterminer une solution

1. Choisir les valeurs des variables hors-base.
2. Calculer les valeurs des variables de base.

## Exemple

1. Si  $t = 3$  et  $v = 4$ ,
2. alors  $x = 2 + 9 = 11$  et  $y = 1 + 3 - 4 = 0$ .

$$x = 2 + 3t$$

$$y = 1 + t - v$$

# **Solveurs d'équations linéaires**

---

**Opérations sur les systèmes linéaires**

# Simplification d'un système linéaire

## Principe

- ▶ Des contraintes équivalentes représentent la même information,
- ▶ mais certaines sont plus simples ou plus expressives que d'autres.

$$x \geq 1 \quad \wedge \quad x \geq 3 \quad \wedge \quad 2 = y + x$$

Élimination de contraintes redondantes

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 3 \quad \wedge \quad 2 = y + x$$

Réécriture d'une contrainte primitive

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 3 \quad \wedge \quad x = 2 - y$$

Modification de l'ordre des contraintes

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 - y \quad \wedge \quad x \geq 3$$

Substitution d'une variable par une expression

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 - y \quad \wedge \quad 2 - y \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 - y \quad \wedge \quad y \leq -1$$

# Définition d'un simplificateur

Un simplificateur de contraintes est une fonction qui :

- ▶ prend en argument un système de contraintes  $C$  et un ensemble de variables  $V$  et
- ▶ renvoie un système de contraintes  $C'$  équivalent à  $C$  par rapport aux variables  $V$ .

- ▶ Une contrainte  $C1$  implique une contrainte  $C2$  si les solutions de  $C1$  sont un sous-ensemble de celles de  $C2$ .
- ▶ La contrainte  $C2$  est dite redondante par rapport à la contrainte  $C1$ .
- ▶ La notation est  $C1 \rightarrow C2$ .

### Élimination de contraintes redondantes

On peut supprimer une contrainte primitive qui est redondante par rapport aux autres contraintes du problème.

$$y \leq x + 2 \quad \wedge \quad x \geq 1 \quad \wedge \quad y \geq 4$$

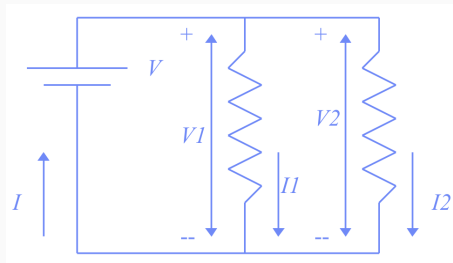
- ▶ Une forme canonique est un système de contraintes équivalent au système de contraintes originel.



# Projection

- La simplification est essentielle lorsqu'on ne s'intéresse qu'à un sous-ensemble de variables.

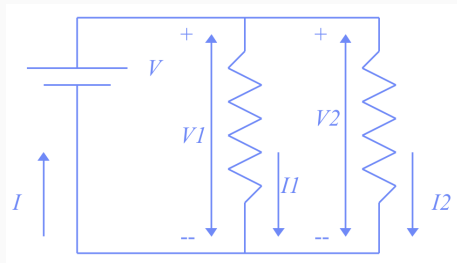
$$\begin{aligned}V_1 &= R_1 \times I_1 \\V_2 &= R_2 \times I_2 \\V - V_1 &= 0 \\V - V_2 &= 0 \\V_1 - V_2 &= 0 \\I - I_1 - I_2 &= 0 \\-I + I_1 + I_2 &= 0 \\R_1 &= 5 \\R_2 &= 10\end{aligned}$$



# Projection

- La simplification est essentielle lorsqu'on ne s'intéresse qu'à un sous-ensemble de variables.

$$\begin{aligned}V_1 &= R_1 \times I_1 \\V_2 &= R_2 \times I_2 \\V - V_1 &= 0 \\V - V_2 &= 0 \\V_1 - V_2 &= 0 \\I - I_1 - I_2 &= 0 \\-I + I_1 + I_2 &= 0 \\R_1 &= 5 \\R_2 &= 10\end{aligned}$$



**Simplification sur  $V$  et  $I$**

$$V = \frac{10}{3} I$$

## Projection d'une contrainte

- ▶ La projection d'une contrainte  $C$  sur une variable  $V$  est une contrainte  $C'$  telle que :
- ▶ Chaque solution de  $C$  est une solution de  $C'$ .
- ▶ Toute solution de  $C'$  peut être étendue en une solution de  $C$ .

$$x \geq y \quad \wedge \quad y \geq z \quad \wedge \quad z \geq 0$$

- ▶ Élimination de la variable  $y$  des inégalités linéaires de  $C$ .
- ▶ Extraire toutes les inégalités sous la forme :

$$t_1 \leq y \text{ ou } y \leq t_2.$$

- ▶ Pour chaque couple  $t_1 \leq y$  et  $y \leq t_2$  , ajouter une nouvelle inégalité

$$t_1 \leq y \otimes y \leq t_2 = t_1 \leq t_2.$$

# Simplification par l'algorithme de Fourier

$$x - 1 \leq y \quad (1)$$

$$-1 - x \leq y \quad (2)$$

$$y \leq 1 - x \quad (3)$$

$$y \leq 1 + x \quad (4)$$

## Exercice

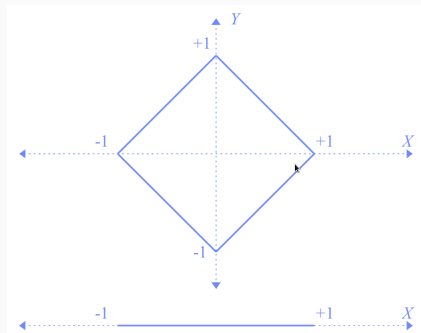
Éliminer la variable  $y$ .

$$(1) \otimes (3) = x \leq 1$$

$$(1) \otimes (4) = 0 \leq 2$$

$$(2) \otimes (3) = 0 \leq 2$$

$$(2) \otimes (4) = -1 \leq x$$



**Simplification par  $y$**

$$-1 \leq x \leq 1$$

## Conditions logiques

Soit  $\delta_1$  et  $\delta_2$  deux variables booléennes, reformuler les contraintes booléennes suivantes comme des contraintes linéaires :

$$\delta_1 \vee \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_1 + \delta_2 \geq 1$$

$$\delta_1 \wedge \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_1 = \delta_2 = 1$$

$$\delta_1 \Rightarrow \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_1 \leq \delta_2$$

$$\delta_1 \Leftrightarrow \delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_1 = \delta_2$$

Soit  $\delta$  une variable booléenne et  $x_i$  des variables quelconques,

$$\begin{aligned} \delta \Rightarrow \sum a_i x_i \leq b & \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_i x_i + (\delta - 1)M \leq b \\ \sum a_i x_i \leq b \Rightarrow \delta & \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_i x_i - (M - 1)\delta \geq b + 1 \end{aligned}$$

Au moins  $k$  contraintes satisfaites parmi  $n$ .

- ▶ pour chaque contrainte  $C_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), poser une contrainte  $C_i \Rightarrow \delta_i$ ;
- ▶ poser la contrainte de disjonction  $\sum_{i=1}^n \delta_i \geq k$ .

Sur des variables réelles  $x_i$  et  $y$ .

$$\begin{aligned}y = \min x_i &\Rightarrow y \leq x_i \forall i \\y = \max x_i &\Rightarrow y \geq x_i \forall i \\&\Rightarrow\end{aligned}$$

## Linearisation

Est-il possible de linéariser la valeur absolue ( $y = |x|$ ) ?



- ▶ Produit de deux variables booléennes :

$$y = b_1 \times b_2 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 \Rightarrow b_1 = b_2 = 1$$

- ▶ Produit d'une variable booléenne et d'une continue :

$$y = b \times x \quad \Leftrightarrow \quad b \Rightarrow x = y$$

# **Solveurs d'équations linéaires**

---

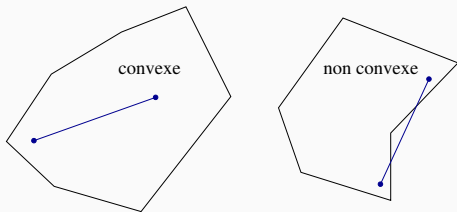
**Optimisation par l'algorithme du  
simplex**

# Polyèdre convexe

- ▶ Les inégalités représentent des plans (en 2D) ou des hyperplans.
- ▶ Un ensemble d'inégalités permet de construire un espace réalisable borné que l'on appelle un polygone convexe (2D) ou polyèdre convexe.

## Rappel sur la convexité

Soit  $a$  et  $b$  deux solutions réalisables d'un polyèdre convexe, alors  $(a+b)/2$  est aussi une solution de ce polyèdre.



La propriété des points extrêmes nous dit que si un polyèdre ( $P$ ) contient une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui est située sur un point extrême.

- ▶ La bonne nouvelle : on ne considère que les points extrêmes.
- ▶ La mauvaise nouvelle : Le nombre de points extrêmes peut-être exponentiellement élevé par rapport au nombre de variables de décision.
- ▶ Le prix de consolation : la convexité garantit que les optimums locaux sont des optimaux globaux.
  - ▶ C'est-à-dire qu'un point extrême est optimal si tous ses voisins sont pires que lui.
  - ▶ Mais attention aux plateaux..

# Algorithme du Simplex

- ▶ Développé juste après la Seconde Guerre mondiale
- ▶ Utilisé pour planifier le pont aérien de Berlin en 1948.
- ▶ L'algorithme d'optimisation le plus répandue.
- ▶ Optimisation continue d'un système linéaire avec une fonction objectif linéaire.
- ▶ Effectue des opérations de pivot à la manière de l'élimination de Gauss-Jordan.
  - ▶ La recherche démarre d'un point extrême.
  - ▶ Elle se déplace (pivot) vers un point extrême voisin.
  - ▶ On répète jusqu'à l'obtention de la solution optimale

# Algorithme du Simplex

- ▶ En partant d'un problème de minimisation sous forme standard.
  - ▶ *Répéter*
    - ▶ Choisir une variable  $y$  dont le coefficient est négatif dans la fonction objectif.
    - ▶ Trouver une contrainte  $x = b + ay + \dots$  où  $a < 0$  et  $-\frac{b}{a}$  est minimal.
    - ▶ Réécrire cette contrainte  $y = -\frac{b}{a} + \frac{1}{a}x + \dots$
    - ▶ Substituer cette expression à  $y$  dans toutes les autres contraintes et dans la fonction objectif.
- Tant qu'il existe une telle variable  $y$  et une telle contrainte.*
- ▶ *Si* il n'existe plus de telle variable  $y$ , l'optimum est atteint.
  - ▶ *Sinon* l'optimum est non borné.

# Algorithme du Simplex : exemple 1

$$\min 10 - y - z$$

$$x = 3 - y$$

$$t = 4 + 2y - 2z$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0$$

On choisit la *variable*  $y$  et la première contrainte est la seule avec un coefficient négatif :

$$y = 3 - x$$

$$\min 7 + x - z$$

$$y = 3 - x$$

$$t = 10 - 2x - 2z$$

On choisit la *variable*  $z$  et la deuxième contrainte est la seule avec un coefficient négatif :

$$z = 5 - x - \frac{1}{2}t$$

$$\min 2 + 2x + \frac{1}{2}t$$

$$y = 3 - x$$

$$z = 5 - x - \frac{1}{2}t$$

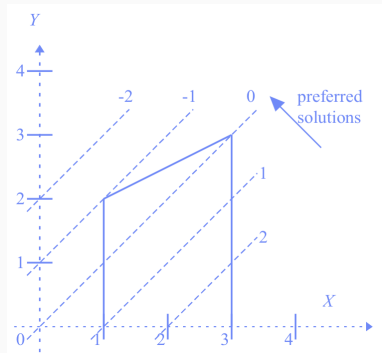
Aucune variable n'a un coefficient négatif dans la fonction objectif.

*La solution optimale a un coût 2.*

## Algorithme du Simplex : exemple 2

$$\begin{aligned} \min x - y \\ y &\geq 0 \\ x &\geq 1 \\ x &\leq 3 \\ 2y &\leq x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min x - y \\ x - s_1 &= 1 \\ x + s_2 &= 3 \\ 2y - x - s_3 &= 3 \\ x \geq 0, y \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$



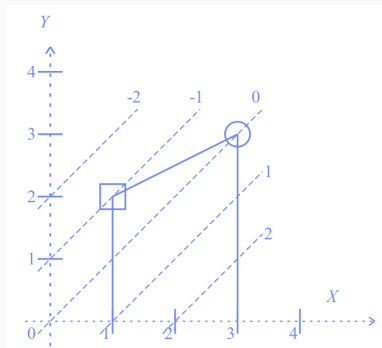


## Algorithme du Simplex : exemple 2

$$\begin{aligned}\min & \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_1 \\ x & = 3 - s_1 \\ s_2 & = 2 - s_1 \\ y & = 3 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3\end{aligned}$$

Choisir  $s_1$  et remplacer par  
 $s_1 = 2 - s_2$ .

$$\begin{aligned}\min & -1 + \frac{1}{2}s_2 + \frac{1}{2}s_3 \\ x & = 1 + s_2 \\ s_1 & = 2 - s_2 \\ y & = 2 + \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_3\end{aligned}$$



- ▶ 1ère solution : rond
- ▶ 2ème solution (optimale) : carré

- ▶ Comment obtenir une solution initiale du problème ?
- ▶ Résoudre un problème différent avec l'algorithme du Simplex !
- ▶ Ajouter des variables artificielles pour transformer le problème sous forme standard.
- ▶ Minimiser la somme des variables artificielles.
- ▶ Si le coût optimal est zéro, alors on peut construire une solution initiale.

# La partie manquante

- Forme standard du Simplex

$$\min x - y$$

$$x - s_1 = 1$$

$$x + s_2 = 3$$

$$2y - x - s_3 = 3$$

- Forme canonique avec variables artificielles

$$\min A_1 + A_2 + A_3 = 7 - x - 2y - s_1 + s_2 - s_3 = 3 - s_1$$

$$A_1 = 1 - x + s_1$$

$$A_2 = 3 - x - s_2$$

$$A_3 = 3 - 2y + x + s_3$$

- Forme résolue avec variables artificielles

$$x = 3 - s_1 - A_2$$

$$s_2 = 2 - s_1 + A_1 - A_2$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3$$

- Suppression des variables artificielles

$$s_2 = 2 - s_1$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3$$

## Problème du brasseur

*De L.-M. Rousseau, École polytechnique de Montréal*

Une petite micro-brasserie produit 2 types de produit (une Ale et une Bière). Suite à une sécheresse, la production doit être limitée par le manque de ressources en céréales (maïs, houblon, malte). Le tableau suivant donne les recettes utilisées pour la production, ainsi que les ressources disponibles et le profit associé à chaque produit.

Bière	Maïs (lb)	Houblon(on)	Malt (lb)	Profit (€)
Ale	5	4	35	10
Bière	15	4	20	23
Quantité	480	160	1190	

Comment le brasseur peut-il maximiser son profit ?

- ▶ Trouver le mélange optimal.
- ▶ Quelles variations peuvent subir les prix sans qu'il ne faille changer le plan de production.
- ▶ De quelle matière première devrait-on négocier davantage de

# Problème du brasseur : solution

## ► Modèle PL

$$\max 10a + 23b$$

$$5a + 15b \leq 480$$

$$4a + 4b \leq 160$$

$$35a + 20b \leq 1190$$

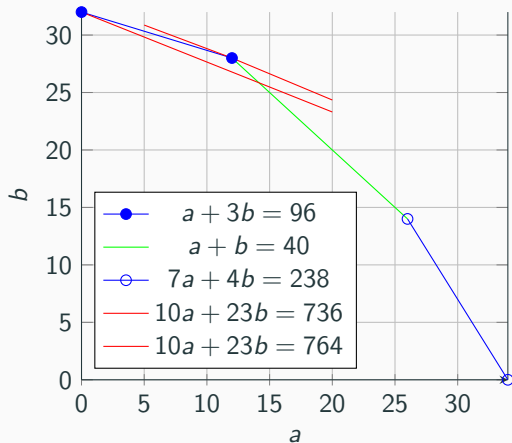
## ► Simplification

$$\max 10a + 23b$$

$$a + 3b \leq 96$$

$$a + b \leq 40$$

$$7a + 4b \leq 238$$



## Problème du brasseur : solution

- Introduction des variables d'écart.

$$\begin{aligned}\min z &= -10a - 23b \\ A_1 &= 96 - a - 3b \\ A_2 &= 40 - a - b \\ A_3 &= 238 - 7a - 4b\end{aligned}$$

- On choisit  $b$  qui a le plus grand coût réduit et la 1ère contrainte.

$$\begin{aligned}\min z &= -10a - 23 \times \left(32 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}A_1\right) &= -736 - \frac{7}{3}a + \frac{23}{3}A_1 \\ b &= 32 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}A_1 &= \\ A_2 &= 40 - a - \left(32 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}A_1\right) &= 8 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}A_1 \\ A_3 &= 238 - 7a - 4 \times \left(32 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}A_1\right) &= 110 - \frac{17}{3}a + \frac{4}{3}A_1\end{aligned}$$

## Problème du brasseur : solution

- ▶ On choisit  $a$  et la 2e équation.

$$\begin{aligned}\min z &= -736 - \frac{7}{3}\left(12 - \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1\right) + \frac{23}{3}A_1 \\ b &= 32 - \frac{1}{3}\left(12 - \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1\right) - \frac{1}{3}A_1 \\ a &= 12 - \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1 \\ A_3 &= 110 - \frac{17}{3}\left(12 - \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1\right) + \frac{4}{3}A_1\end{aligned}$$

- ▶ Simplification et preuve d'optimalité

$$\begin{aligned}\min & -764 + \frac{7}{2}A_2 + \frac{13}{2}A_1 \\ b &= 28 + \frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_1 \\ a &= 12 - \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_1 \\ A_3 &= 42 + \frac{17}{2}A_2 - \frac{3}{2}A_1\end{aligned}$$

- ▶ Si le prix de la bière passe à 30 €, les coûts réduits après le pivot sur  $b$  :

# **Solveurs d'équations linéaires**

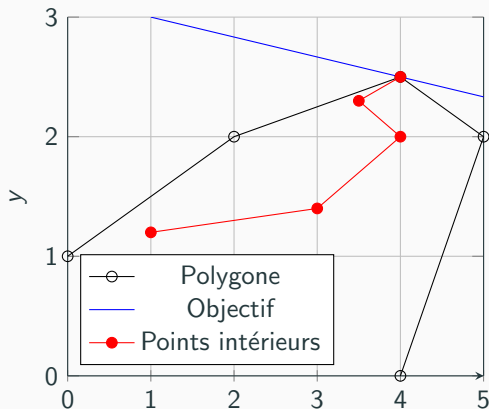
---

**Méthodes de points intérieurs**



# Méthodes de points intérieurs

- ▶ En théorie ces méthodes convergent dans un temps polynomial,
- ▶ elles devraient donc être beaucoup plus efficaces que le Simplex.
- ▶ En pratique, elles fonctionnent mieux quand le polyèdre est plus *lisse*.
- ▶ Le Simplex semble plus efficace quand les arêtes sont plus *prononcées*.



# Randonnée en montagne

Pour escalader le mont blanc 4 alpinistes cherchent à répartir des objets dans leur sac-à-dos de façon à :

- ▶ minimiser la somme des différences de poids entre deux alpinistes se suivant dans la cordée ;
- ▶ obtenir une différence d'au moins 5 kilos entre le premier et le dernier de cordée ;
- ▶ placer dans des sacs différents les objets 1, 2 et 3 pour des raisons de sécurité.

Objets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Poids (kg)	24	5	10	13	17	14	22	7	8	11	9

# Dualité et sensibilité

---

# Dualité et sensibilité

---

Dualité

# Soit un programme linéaire

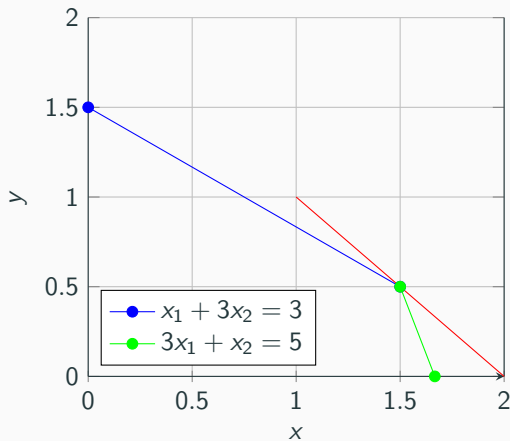
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

► solution optimale :  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ .



# Soit un programme linéaire

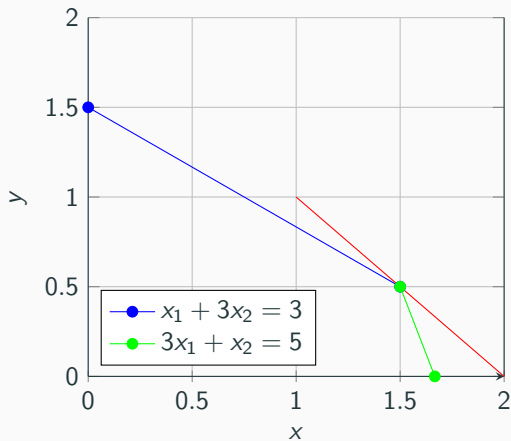
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- ▶ solution optimale :  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ .
- ▶ Preuve d'optimalité en sommant les deux contraintes.
- ▶  $(x_1 + 3x_2) + (3x_1 + x_2) \leq 3 + 5$



# Soit un programme linéaire

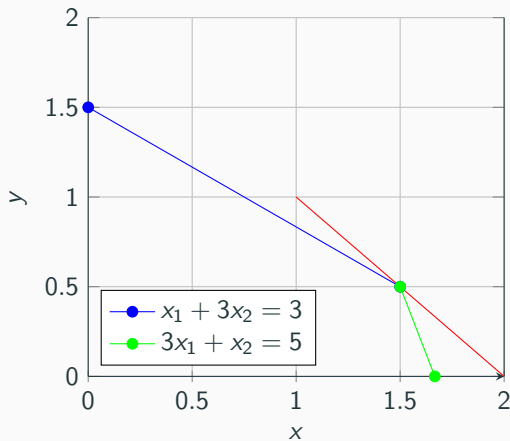
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- ▶ solution optimale :  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ .
- ▶ Preuve d'optimalité en sommant les deux contraintes.
- ▶  $(x_1 + 3x_2) + (3x_1 + x_2) \leq 3 + 5$
- ▶  $4x_1 + 4x_2 \leq 8$
- ▶  $x_1 + x_2 \leq 2$



## un autre programme linéaire

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Est-ce que la solution (1,1) est optimale ?



## un autre programme linéaire

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 & \leq 5 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Est-ce que la solution (1,1) est optimale ?

- ▶ Preuve d'optimalité : combinaison linéaire des contraintes.
- ▶  $3 \times (x_1 + 2x_2) + (4x_1 + x_2) \leq 3 \times 3 + 5$

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Est-ce que la solution (1,1) est optimale ?

- ▶ Preuve d'optimalité : combinaison linéaire des contraintes.
- ▶  $3 \times (x_1 + 2x_2) + (4x_1 + x_2) \leq 3 \times 3 + 5$
- ▶  $7x_1 + 7x_2 \leq 14$
- ▶  $x_1 + x_2 \leq 2$

### Preuve d'optimalité

- ▶ La « preuve d'optimalité » est une borne supérieure sur l'objectif.
- ▶ On veut donc construire une équation qui, tout en étant minimale, est toujours plus grande que n'importe quelle solution réalisable.
- ▶ La solution courante est optimale si la borne est atteinte.

## un autre programme linéaire

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad \times y_1$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5 \quad \times y_2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad y_1, y_2 \geq 0$$

$$\min 3y_1 + 5y_2$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

- ▶ On introduit des multiplicateurs pour chaque contrainte.
- ▶ On définit leur signe qui ne doit pas changer le sens des inégalités.
- ▶ Les coefficients de l'expression doivent être supérieurs à ceux de l'objectif pour garantir une valeur supérieure à celle de la fonction objectif.
- ▶ On minimise la valeur de la borne supérieure.

- ▶ Le concept de dualité est fondamental en PL.
- ▶ Réduction du nombre de contraintes.
- ▶ Obtention d'une structure plus efficace pour la résolution du problème.
- ▶ Conception de méthodes de décomposition performantes.
- ▶ Il fournit essentiellement de l'information sur la sensibilité de la solution optimale par rapport au changement dans :
  - ▶ la fonction objectif ;
  - ▶ les coefficients des contraintes ;
  - ▶ l'addition de nouvelles variables ;
  - ▶ l'addition de nouvelles contraintes.

# Dualité sous forme matricielle

**Primal**

$$\begin{aligned}\max z &= c^t x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0\end{aligned}$$

**Dual**

$$\begin{aligned}\min z &= b^t y \\ A^t y &\geq c \\ y &\geq 0\end{aligned}$$

*L'un est le dual de l'autre !*

# Théorème de la dualité faible

## Dualité faible

Soit  $X$  l'ensemble des solutions réalisables du primal et  $X'$  l'ensemble des solutions réalisables du dual.

$$\forall x \in X \text{ et } \forall x' \in X' \text{ alors } c^t x \leq b^t x' \text{ (i.e } z \leq z')$$

## Corollaire

Si un PL n'admet aucune solution optimale finie, il est non borné, alors son dual n'admet aucune solution réalisable.

## Dualité forte

Si le problème primal et son dual admettent chacun au moins une solution réalisable, soit  $z$  la valeur de l'objectif du primal et  $z'$  la valeur de l'objectif du dual, alors :

- ▶  $z$  et  $z'$  ont une valeur optimale finie
- ▶  $\max z = \min z' \iff c^t x = b^t x'$ .

# Exemple primal dual

## Primal

$$\max 2400x_1 + 4000x_2$$

$$10x_1 + 40x_2 \leq 4000$$

$$20x_1 + 20x_2 \leq 2600$$

$$30x_1 + 10x_2 \leq 2700$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Dual

$$\min 4000y_1 + 2600y_2 + 2700y_3$$

$$10y_1 + 20y_2 + 30y_3 \geq 2400$$

$$40y_1 + 20y_2 + 10y_3 \geq 4000$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



# Théorème des écarts complémentaires

À l'optimum,

- ▶ Une variable duale correspond à une contrainte non saturée est nécessairement nulle.
- ▶ Une variable duale strictement positive correspond à une contrainte saturée.

# Variables duales et coût réduits

## Le prix (ou variable) dual pour chaque contrainte

- ▶ Effet sur l'objectif si on augmente d'une unité le côté droit de la contrainte.
- ▶ Coût marginal (shadow price) qui indique le montant que l'on serait prêt à payer pour une unité additionnelle de la ressource correspondante.
- ▶ valeur optimale donnée à la variable associée dans le problème dual.

## Le coût réduit pour chaque variable.

- ▶ De combien devrait-on augmenter le coefficient d'une variable pour qu'il devienne profitable de faire entrer cette variable dans la base.
- ▶ La pénalité (par unité) à payer pour forcer la variable dans la solution.
- ▶ Équivaut à l'écart de la contrainte dual associé à cette variable.

# Transformation

Primal	Dual
Fonction économique min	Second membre
Second membre	Fonction économique max
$i$ -ème contrainte =	$y_i \in \mathbb{R}$
$i$ -ème contrainte $\geq$	$y_i \geq 0$
$i$ -ème contrainte $\leq$	$y_i \leq 0$
$x_j \in \mathbb{R}$	$j$ -ème contrainte =
$x_j \geq 0$	$j$ -ème contrainte $\leq$
$x_j \leq 0$	$j$ -ème contrainte $\geq$

# Dualité et sensibilité

---

## Analyse de sensibilité

- ▶ Lorsque la solution de base optimale du problème de PL est analysée pour répondre aux questions relatives aux changements dans sa formulation, l'étude porte le nom d' *analyse de sensibilité*.
- ▶ On appelle *post-optimisation* l'ensemble des techniques permettant d'obtenir l'optimum du problème de PL lorsque certaines données ont subi des modifications.

# Problème d'horaire de personnel

- ▶ Chaque travailleur reçoit 300 € par semaine pour un horaire régulier :
  - ▶ 25 € de supplément pour le samedi ;
  - ▶ 35 € de supplément pour le dimanche.
- ▶ Chaque travailleur :
  - ▶ travaille 5 jours consécutifs puis
  - ▶ a deux jours consécutifs de congé.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
# requis	20	13	10	12	15	18	20

# Choisir le bon modèle

Regardons l'ensemble des horaires possibles ...

1 <sup>er</sup> jour	\$\$\$	Lundi	Mardi	Mer.	Jeudi	Ven.	Sam.	Dim
Lundi	300	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	White	Light
Mardi	325	Light	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue	Light
Mercredi	360	Light	Light	Blue	Blue	Blue	Blue	Blue
Jeudi	360	Blue	Light	Light	Blue	Blue	Blue	Blue
Vendredi	360	Blue	Blue	Light	Light	Blue	Blue	Blue
Samedi	360	Blue	Blue	Blue	Light	Light	Blue	Blue
Dimanche	335	Blue	Blue	Blue	Blue	Light	Light	Blue

Minimiser

$$300 X_{LUN} + 325 X_{MAR} + 360 X_{MER} + 360 X_{JEU} + 360 X_{VEN} + 360 X_{SAM} + 335 X_{DIM}$$

Sujet à:

$$\begin{array}{lclclclclcl} \text{lun)} & X_{LUN} & & & + X_{JEU} + X_{VEN} + X_{SAM} + X_{DIM} & \geq & 20 \\ \text{mar)} & X_{LUN} + X_{MAR} & & & + X_{VEN} + X_{SAM} + X_{DIM} & \geq & 13 \\ \text{mer)} & X_{LUN} + X_{MAR} + X_{MER} & & & + X_{SAM} + X_{DIM} & \geq & 10 \\ \text{jeu)} & X_{LUN} + X_{MAR} + X_{MER} + X_{JEU} & & & + X_{DIM} & \geq & 12 \\ \text{ven)} & X_{LUN} + X_{MAR} + X_{MER} + X_{JEU} + X_{VEN} & & & & \geq & 16 \\ \text{sam)} & & X_{MAR} + X_{MER} + X_{JEU} + X_{VEN} + X_{SAM} & & & \geq & 18 \\ \text{dim)} & & X_{MER} + X_{JEU} + X_{VEN} + X_{SAM} + X_{DIM} & & & \geq & 20 \end{array}$$



# La solution

La valeur de l'objectif est 7750.000.

<b>Variable</b>	<b>Valeur</b>	<b>Coût Réduit</b>
$X_{LUN}$	2.00	0.00
$X_{MAR}$	0.00	100.00
$X_{MER}$	2.00	0.00
$X_{JEU}$	7.00	0.00
$X_{VEN}$	5.00	0.00
$X_{SAM}$	4.00	0.00
$X_{DIM}$	2.00	0.00

<b>Contraintes</b>	<b>Écart</b>	<b>Duales</b>
LUN)	0.00	100.00
MAR)	0.00	0.00
MER)	0.00	100.00
JEU)	1.00	0.00
VEN)	0.00	100.00
SAM)	0.00	25.00
DIM)	0.00	135.00

# Analyse des limites

Limites pour lesquelles la base reste la même :

## Limites sur les coefficients de l'objectifs:

<i>Var</i>	<i>coef actuel</i>	<i>Aug pos</i>	<i>Dim pos.</i>
$X_{LUN}$	300	150.00	300.00
$X_{MAR}$	325	INFINITY	100.00
$X_{MER}$	360	150.00	300.00
$X_{JEU}$	360	0.00	100.00
$X_{VEN}$	360	150.00	0.00
$X_{SAM}$	360	150.00	25.000
$X_{DIM}$	335	25.00	100.00

## Limites sur les termes de droite

<i>Contr.</i>	<i>val actuel</i>	<i>Aug pos</i>	<i>Dim pos.</i>
LUN)	20.00	3.00	1.50
MAR)	13.00	1.00	5.00
MER)	10.00	7.50	1.50
JEU)	12.00	1.00	INFINITY
VEN)	16.00	6.00	1.50
SAM)	18.00	1.00	4.00
DIM)	20.00	3.00	1.50

# **Programmation linéaire en nombres entiers**

---

## Types de problème d'optimisation

- ▶ Programme Linéaire en Nombre Entier (PLNE ou IP) :  $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ .
- ▶ Programme Linéaire Mixte (MIP) :  $X \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n$ .

## Relaxation linéaire

Relaxation des contraintes d'intégrité :  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ .

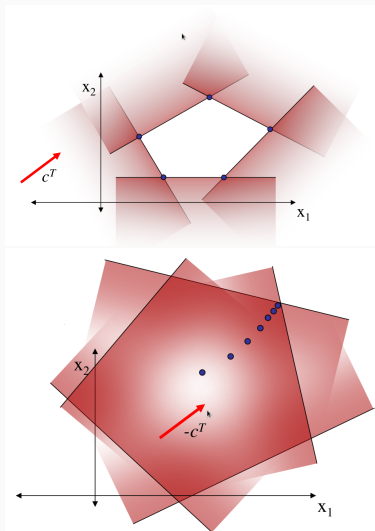
## Résolution par séparation et évaluation progressive

Ces problèmes sont théoriquement très difficiles, mais en pratique ils peuvent (souvent) être résolus très rapidement.

- ▶ On branche sur les variables de décision.
- ▶ La relaxation linéaire nous donne des bornes inférieures.

## Algorithme du simplexe

- ▶ Une solution optimale se trouve nécessairement sur un point extrême.
- ▶ Donc on peut la trouver en parcourant les arêtes du polyèdre.

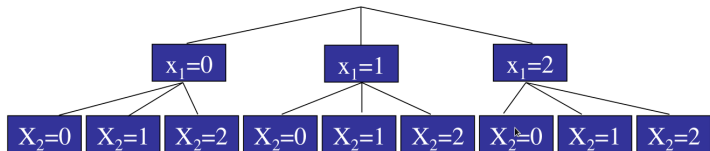


## Méthodes par points intérieurs

- ▶ Méthodes dites “Barrières”
- ▶ Formulation “Primal-Dual”
- ▶ Pas de Newton

## Énumération

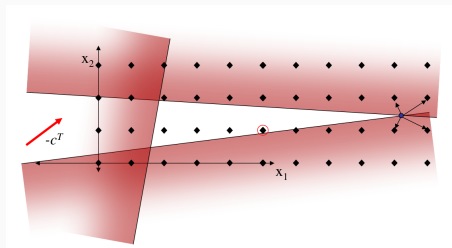
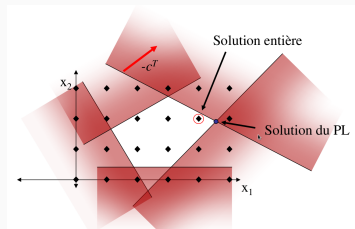
- ▶ Recherche Arborescente, Programmation Dynamique
- ▶ Garantie de trouver une solution réalisable entière.
- ▶ Mais le temps de calcul croît exponentiellement avec la taille.



# Méthode de résolution pour PLNE

## Arrondi d'une solution

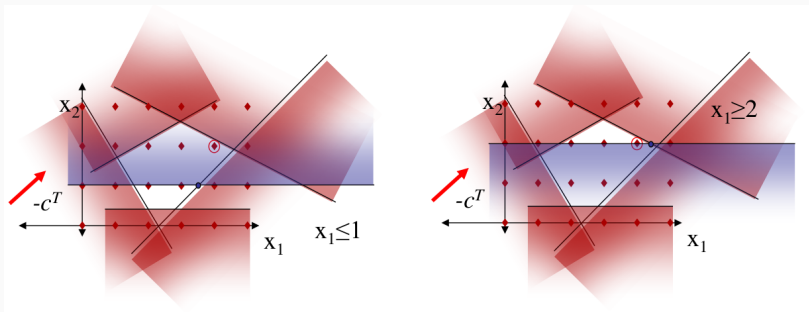
- ▶ Le PL fournit une borne inf (ou sup si on maximise) sur la valeur du PLNE.
- ▶ Mais en arrondissant, on peut être très loin d'une solution entière ...



# Méthode de résolution pour PLNE

## Combinaison des deux approches

- ▶ Résoudre le PL pour obtenir une solution.
- ▶ Créer deux sous-problèmes en ajoutant des contraintes.



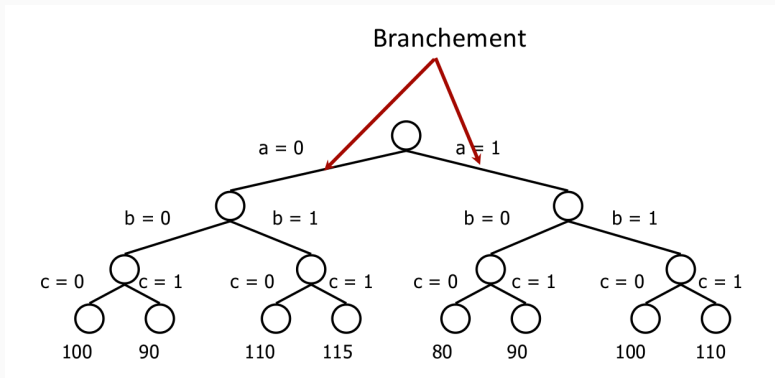


## Principe

- ▶ Chercher systématiquement toutes les combinaisons variables-valeurs possibles.
- ▶ Utiliser une heuristique pour déterminer sur quelle variable brancher.
- ▶ Utiliser les bornes inférieures pour limiter la recherche.
- ▶ Construire un arbre de recherche.

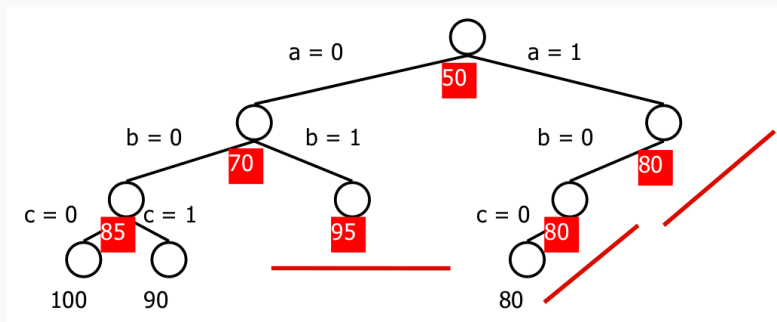
# SEP : le branchement

Imaginez un problème avec 3 variables :  $a, b, c \in \{0, 1\}$ .



## SEP : utilisation des bornes inférieures

Si nous pouvons calculer une borne sur le coût minimal d'un noeud.



Mieux connu sous le nom anglais « branch and bound »

**Branch** créer plusieurs sous-problèmes

- ▶ assigner heuristiquement une valeur à une variable.
- ▶ On choisit une variable non entière et on la force soit à :
  - ▶ être plus grande ou égale à l'entier supérieur ou
  - ▶ être plus petite ou égale à l'entier inférieur.

**Bound** comparer la borne inférieure à la meilleure solution connue.

Ça ne vaut pas la peine d'explorer le sous-arbre si

- ▶ Minimisation : si  $BorneInf \geq MeilleureSolution$ ,
- ▶ Maximisation : si  $BorneSup \leq MeilleureSolution$ .

## Exemple : branch-and-bound

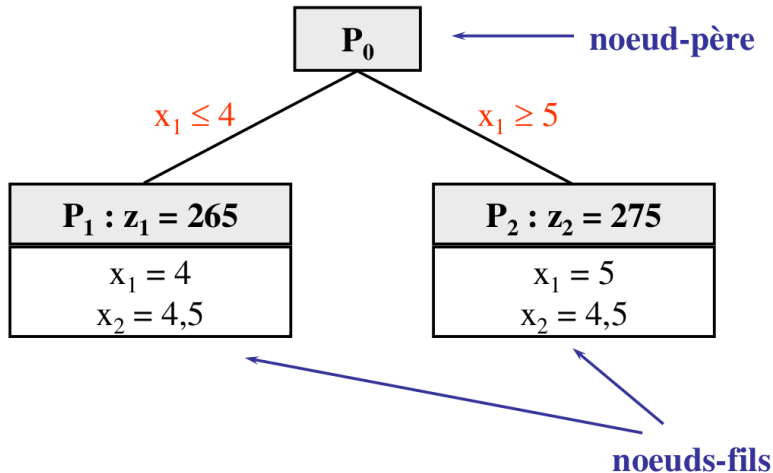
$$\begin{aligned}\max z &= 10x_1 + 50x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ x_1 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}^2\end{aligned}$$

### Premier noeud

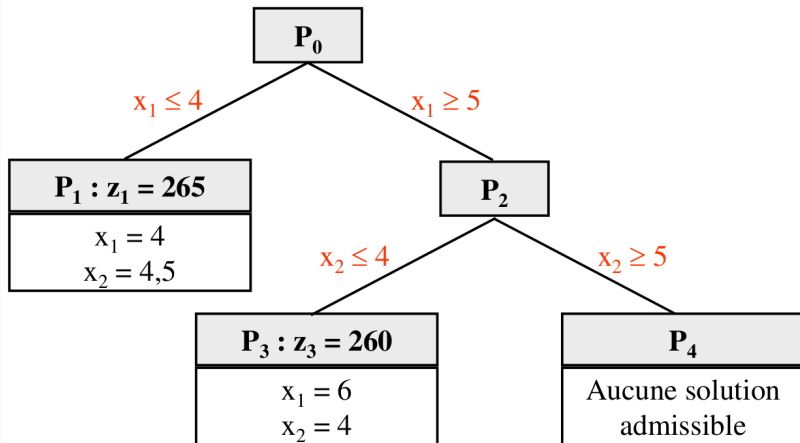
(solution optimale de la relaxation linéaire)

$P_0 : z_0 = 282,5$	← Valeur optimale
$x_1 = 4,5$ $x_2 = 4,75$	← Variables non nulles

## Exemple : branch-and-bound

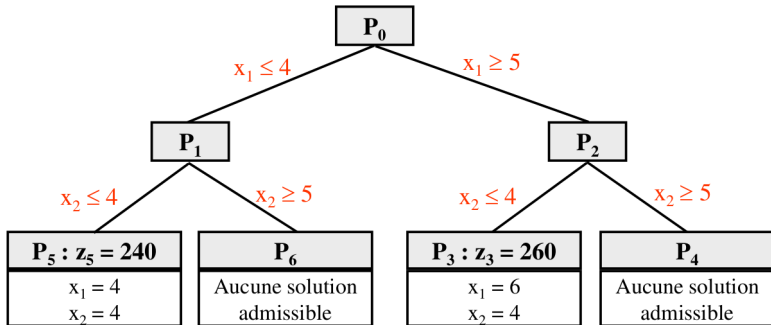


## Exemple : branch-and-bound



# Exemple : branch-and-bound

Au final ...

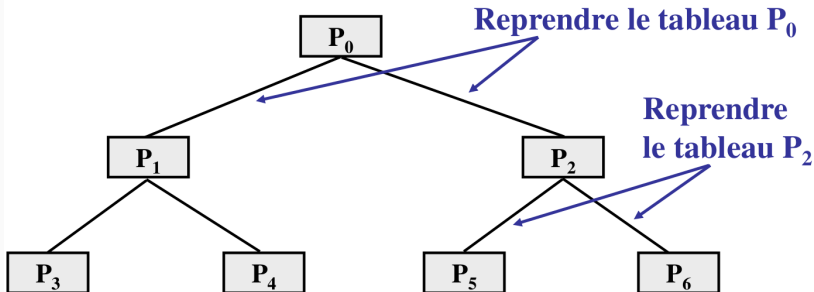




# Calculs incrémentaux

En règle générale, pour calculer une solution optimale d'un nœud-fils,

- ▶ il sera plus rapide de modifier le tableau optimal du nœud père
- ▶ plutôt que de reprendre les calculs du simplexe à partir du début.



# Algorithme (problème de minimisation)

Les notations suivantes sont utilisées :

**L** ensemble des sous-problèmes actifs

$z_U$  la borne supérieure sur la valeur optimale de MIP ;

$z_i^{LP}$  la valeur optimale du problème linéaire  $i$  ;

$X^*$  La meilleure solution réalisable.

# Algorithme (problème de minimisation)

**Initialisation**  $L = \{\text{relaxation initiale}\}$  ;  $z_U = +\infty$ .

**Optimalité** Si  $L = \emptyset$ , alors  $X^*$  est la solution optimale.

**Branch** Choisir un sous-problème  $i$  et l'éliminer de la liste  $L$ .

**Bound** Résoudre la relaxation linéaire de  $i$ .

- ▶ Si elle n'est pas réalisable, revenir à l'étape précédente.
- ▶ Sinon, poser  $z_i^{LP}$  et  $X_i$  la valeur et la solution optimales obtenues.

**Évaluation**

- ▶ Si  $z_i^{LP} = z_U$ , aller à l'étape *Optimalité*.
- ▶ Sinon si  $X_i$  n'est pas entière, aller à l'étape suivante.
- ▶ Sinon  $z_U = z_i^{LP} = z_U$  et  $X^* = X_i$ .  
Éliminer de  $L$  tous les sous-problèmes  $j$  tels que  $z_j^{LP} \geq z_U$  et aller à l'étape 2.

**Séparation** Choisir une variable binaire ayant une valeur fractionnaire dans la solution  $X_i$  et subdiviser le problème  $i$  à partir de cette variable.

Ajouter les nouveaux problèmes à  $L$ .

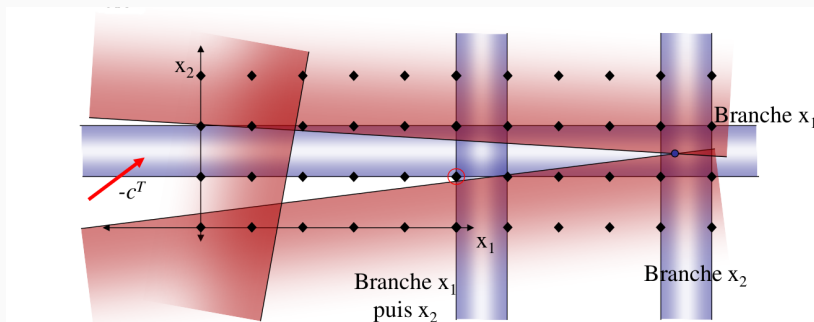
# Remarques sur l'algorithme

Pour que l'algorithme soit complètement défini, on doit fixer :

**Branch** la sélection du sous-problème à résoudre.

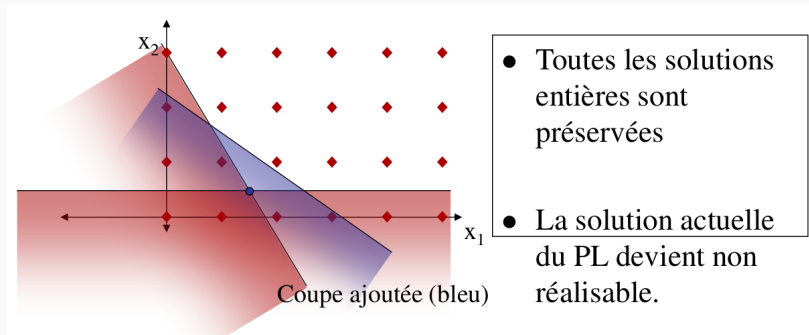
**Évaluation** la règle de séparation du nœud courant.

Ces deux règles sont cruciales quant à l'efficacité de l'approche de séparation et d'évaluation progressive.



## Ajout d'une coupe

Ajouter des coupes au PL pour améliorer la qualité de la borne.



# Bibliographie

---



Louis-Martin Rousseau.

**Outils de recherche opérationnelle en génie, 2013.**

École Polytechniques de Montréal.



Michel Rueher.

**Linear equation solver, 2013.**

Université Nice Sophia Antipolis.