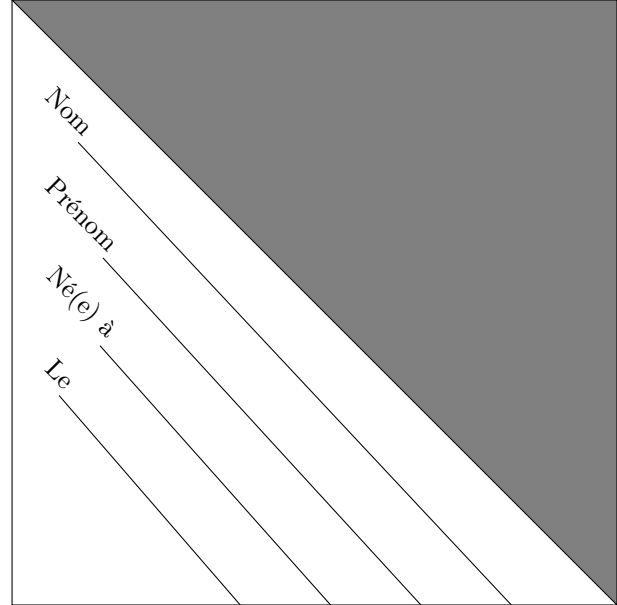


Épreuve de contrôle continu
du Mardi 26 Novembre 2019

Durée : 2 heures
Tous documents autorisés

Note



Il est de votre responsabilité de rabattre le triangle grisé et de le cacheter au moyen de colle, agrafes ou papier adhésif. Si ne vous le faites pas, vous acceptez implicitement que votre copie ne soit pas anonyme.

1 Faire le plein (6 points)

Avec une voiture, on doit parcourir K kilomètres sur l'autoroute. On cherche à savoir combien de fois au minimum et à quelles stations on devra s'arrêter pour faire le plein. On part du kilomètre 0 avec le réservoir plein et on sait à quel kilomètre se trouvent les stations s_1, s_2, \dots, s_n avec $s_1 < s_2 < \dots < s_n$, et la distance d que l'on peut parcourir avec un plein. Les distances sont données en centaines de kilomètres.

Question 1. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution.

Question 2. Soit l'instance suivante, $K = 25, d = 6, s_1 = 4, s_2 = 7, s_3 = 11, s_4 = 13, s_5 = 18, s_6 = 20, s_7 = 23$. Quelle est la solution optimale pour cette instance ?

Question 3. Proposez un algorithme pour résoudre ce problème.

Question 4. L'algorithme proposé est-il optimal ? Donnez un contre-exemple ou une intuition.

2 Point de vue (5 points)

Des gratte-ciels sont construits sur une grille $n \times n$. Chaque gratte-ciel a un nombre d'étages correspondant à sa taille (de 1 à n). Dans chaque colonne et chaque ligne chaque taille apparaît exactement une fois. Les nombres sur les bords de la grille indiquent combien de gratte-ciels peuvent être vus en regardant de ce point vers la ligne ou la colonne correspondante. Un gratte-ciel est visible, si tous les gratte-ciels devant lui sont plus petits. Voici l'exemple d'une grille et de sa solution :

	4		1	
3				
				3
				2

	4		1	
	1	2	4	3
	2	3	1	4
	3	4	2	1
3	4	1	3	2
				3
				2

Par exemple, dans la troisième colonne en regardant du bas vers le haut on peut voir 2 gratte-ciels : celui d hauteur 3 et celui d hauteur 4.

Dans la dernière ligne en regardant de la droite vers la gauche on peut voir 3 gratte-ciels : ceux d hauteur 1, 2 et 4.

On note g_1, g_2, \dots, g_n une séquence des hauteurs de n gratte-ciels, on va déduire des règles de résolution.

Question 1. Si on voit n gratte-ciels que pouvons-nous déduire de g_1, g_2, \dots, g_n ?

Question 2. Si on voit 1 gratte-ciel que pouvons-nous déduire de g_1, g_2, \dots, g_n ?

Question 3. Si on voit $n - 1$ gratte-ciels et que la hauteur du dernier gratte-ciel g_n est différente de n que pouvons-nous déduire de la séquence de gratte-ciels ?

Question 4. Si on voit 2 gratte-ciels et que la hauteur du dernier gratte-ciel g_n est de n que pouvons-nous déduire de la séquence de gratte-ciels ?

Question 5. Donnez la solution de la grille 5×5 (directement sur la grille).

5					
1					4
			5		2
3					2
	4	1			2

3 Le Burger contraint (10 points)

On souhaite réaliser un burger parfait avec les ingrédients suivants :

Ingrédient	Sodium (mg)	Gras (g)	Calories	Prix
Pain	330	9	260	13
Steak	50	17	220	20
Fromage	310	6	70	10
Oignon	1	2	9	9
Cornichon	256	0	5	3
Salade	3	0	4	4
Ketchup	147	0	20	2
Tomate	3	0	9	4

Pour que le burger soit parfait, il doit contenir exactement 1 pain, et entre 1 et 5 éléments de chaque ingrédient. Chaque élément est utilisé en entier (on ne met pas de demi tranche de fromage). Afin d'obtenir le goût parfait, il doit y avoir autant de salade que de ketchup, et autant de cornichons que de tomates.

On cherche le burger parfait **le plus cher**.

Question 0. À quel problème vous fait penser ce problème ?

Question 1. Considérons deux ingrédients a et b de "poids" w_a, w_b et de "prix" p_a, p_b . Prouvez que si ces deux ingrédients doivent être en quantité égale $q_a = q_b$ alors c'est équivalent à avoir un ingrédient c qui remplace a et b de "poids" $w_c = w_a + w_b$ et de "prix" $p_c = p_a + p_b$, et donnez la quantité q_c de l'ingrédient c .

Question 2. Étant donné que le burger parfait doit contenir un seul pain, autant de salade que de ketchup, et autant de cornichons que de tomates. Donnez un tableau simplifié des ingrédients.

Ingrédient	Sodium (mg)	Gras (g)	Calories	Prix

Question 3. Sachant qu'il doit y avoir au moins un élément de chaque ingrédient, donnez les caractéristiques minimales (sodium, gras, calories, prix) du burger parfait.

Sodium (mg)	
Gras (g)	
Calories	
Prix	

Question 4. Sachant que le burger parfait ne contient pas plus de 900 calories, quel est le burger parfait de prix maximal? Donnez ses caractéristiques ainsi que les quantités de chaque ingrédient.

Ingrédient	Quantité
Pain	
Steak	
Fromage	
Oignon	
Cornichon	
Salade	
Ketchup	
Tomate	

Sodium (mg)	
Gras (g)	
Calories	
Prix	

Question 5. De plus le burger parfait ne doit pas avoir plus de 1500mg de sodium et 150g de gras. En vous inspirant du problème de Sac à dos, proposez un algorithme glouton pour trouver le burger parfait de prix maximum.
